



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사학위 청구논문

유한요소해석법을 이용한 셸 구조물의 동적 좌굴 해석

**Dynamic Buckling Analysis of Shell Structures using
Finite Element Method**

2012년 2월

인하대학교 대학원

항공우주공학과

이 희 준

공학석사학위 청구논문

유한요소해석법을 이용한 셸 구조물의 동적 좌굴 해석

**Dynamic Buckling Analysis of Shell Structures using
Finite Element Method**

2012년 2월

지도교수 조 진 연

이 논문을 석사학위 논문으로 제출함

인하대학교 대학원

항공우주공학과

이 희 준

이 논문을 이희준의 석사학위논문으로 인정함

2012 년 2 월



주심 _____ 김 기 욱 _____

부심 _____ 조 진 연 _____

위원 _____ 이 승 수 _____

요 약

매개 변수 공진으로도 알려진 동적 좌굴 현상은 구조물이 축 방향의 동적 압축 하중을 받을 때 발생하는 동적 불안정 현상으로서 구조물에 심각한 파손을 유발할 수 있다. 특히 초음속으로 운동하는 항공기나 탄도 미사일, 발사용 로켓과 지구 대기권 재돌입체 그리고 초공동 수중운동체와 같이 동적 압축 하중을 받는 구조물을 설계할 때 구조물의 동적 좌굴 거동을 예측하여 설계하는 것이 중요하다. 이에 본 논문에서는 축 방향의 동적 압축 하중을 받는 쉘 구조물에 대해 동적 좌굴 해석을 하기 위한 유한요소해석 프로그램을 개발하였으며, 선형/비선형 정적 해석과 진동 및 정적 좌굴 해석을 통해 프로그램에 사용된 쉘 요소의 신뢰성을 확인하였다. 또한 다양한 모델에 대한 동적 좌굴 해석 결과를 이론적인 해나 실험을 통해 나온 결과와 비교함으로써 본 프로그램의 타당성을 검증하였다.

ABSTRACT

Dynamic buckling, also known as parametric resonance, is one of the dynamic instability phenomena which may lead to serious failure of structure. It occurs when compressive dynamic loading of axial direction is applied to the structures. Therefore it is essential to consider the dynamic buckling behaviors of structures, especially when the structures is designed to be utilized in compressive dynamic loading of axial direction such as faster supersonic aircrafts, ballistic missiles, launcher, re-entry vehicles and supercavitating underwater vehicles. In this study, the finite element program is developed for dynamic buckling analysis. Linear and nonlinear static analyses, dynamic analysis and static buckling analysis are performed to demonstrate the accuracy of the developed program. Also the dynamic buckling analyses are carried out for various models and the computational results are verified by comparing with analytical and experimental solutions.

목 차

요약	i
ABSTRACT	ii
목차	iii
그림 목차	v
표 목차	vi
1. 서 론	1
2. 이 론	3
2.1. MITC4 Shell Element	3
2.2. Geometric Nonlinear Formulation	7
2.2.1. Finite Rotation Formulation	21
2.2.2. Constitutive Matrix	22
2.2.3. Mass Matrix	25
2.2.4. 6-DOF Shell Element	26
2.3. Buckling Theory	30
2.3.1. Static Buckling	31
2.3.2. Dynamic Buckling	32
2.3.3. Dynamic Buckling Theory of Beam	34
3. Numerical Example	39
3.1. Linear Static Analysis	39
3.1.1. Patch Test	39
3.1.1.1. Constant Curvature Patch Test	40
3.1.1.2. Constant Shear Patch Test	41
3.1.1.3. Constant Twist Patch Test	43
3.1.2. Pinched Cylinder	44
3.1.3. Hemispherical Shell	46
3.2. Geometric Nonlinear Analysis	48
3.3. Static Buckling Analysis	50

3.3.1. Rectangular Plate Shell	50
3.3.2. Cylindrical Shell	52
3.3.3. Stiffened Square Plate Shell	55
3.4. Dynamic Buckling Analysis	57
3.4.1. Dynamic Buckling Analysis of Beam	57
3.4.2. Dynamic Buckling Analysis of Plate	59
3.4.3. Dynamic Buckling Analysis of Stiffened Plate	61
4. 결 론	63
참고문헌	64
부 록	65

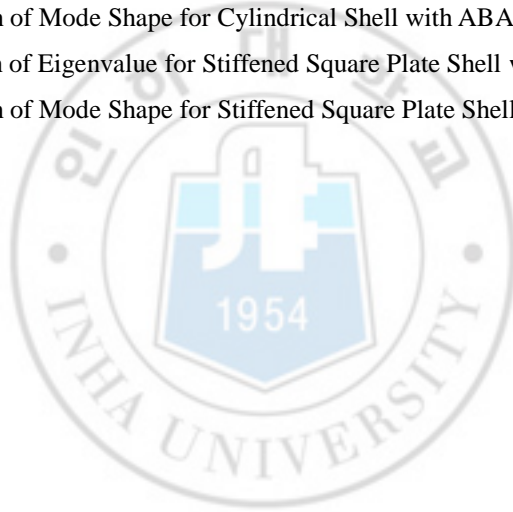


그림 목차

Fig. 1 Four-node shell element	4
Fig. 2 Interpolation function for the transverse shear strains	6
Fig. 3 An arbitrary surface with global Cartesian coordinate system, natural coordinate system and local covariant coordinate system spanned by \mathbf{g}_i	10
Fig. 4 Local Cartesian coordinate system	23
Fig. 5 Global Cartesian coordinate system and local coordinate system	26
Fig. 6 Dynamic Buckling Model of Beam	34
Fig. 7 Patch Test Mesh	39
Fig. 8 Constant Curvature Patch Test Model	40
Fig. 9 Constant Shear Patch Test Model	41
Fig. 10 Constant Twist Patch Test Model	43
Fig. 11 Pinched Cylinder Model	44
Fig. 12 Pinched Cylinder 1/8 Model	44
Fig. 13 Comparison of Convergence for Pinched Cylinder with ABAQUS	45
Fig. 14 Comparison of Linear Static Analysis for Pinched Cylinder with ABAQUS	46
Fig. 15 Hemispherical Shell Model	46
Fig. 16 Comparison of Convergence for Hemispherical Shell with ABAQUS	47
Fig. 17 Comparison of Linear Static Analysis for Hemispherical Shell with ABAQUS	48
Fig. 18 Beam Model for Geometric Nonlinear Analysis	48
Fig. 19 Comparison of Geometric Nonlinear Analysis for Beam with ABAQUS	49
Fig. 20 Geometry Change of Beam According to Loads Increase	49
Fig. 21 Rectangular Plate Shell Model	50
Fig. 22 Cylindrical Shell Model	52
Fig. 23 Stiffened Square Plate Shell Model	55
Fig. 24 Dynamic Buckling Analysis Model for Beam	57
Fig. 25 Dynamic Instability Region of Beam	58
Fig. 26 Dynamic Buckling Model for Plate	59
Fig. 27 Dynamic Instability Region of Plate	60
Fig. 28 Dynamic Buckling Analysis Model for Stiffened Plate	61
Fig. 29 Comparison of Dynamic Instability Region for Stiffened Plate with Plate	62

표 목차

Table. 1 Constant Curvature Patch Test Results	41
Table. 2 Constant Shear Patch Test Results	42
Table. 3 Constant Twist Patch Test Results	43
Table. 4 Comparison of Linear Static Analysis for Pinched Cylinder with Exact Solution ·	45
Table. 5 Comparison of Linear Static Analysis for Hemispherical Shell with Exact Solution ·	47
Table. 6 Comparison of Eigenvalue for Rectangular Plate Shell with ABAQUS	51
Table. 7 Comparison of Mode Shape for Rectangular Plate Shell with ABAQUS	51
Table. 8 Comparison of Eigenvalue for Cylindrical Shell with ABAQUS	53
Table. 9 Comparison of Critical Buckling Pressure for Cylindrical Shell with Analytic Solution ·	53
Table. 10 Comparison of Mode Shape for Cylindrical Shell with ABAQUS	54
Table. 11 Comparison of Eigenvalue for Stiffened Square Plate Shell with ABAQUS	56
Table. 12 Comparison of Mode Shape for Stiffened Square Plate Shell with ABAQUS ..	56



1. 서 론

좌굴(buckling, 挫屈)이란 주로 길이가 그 횡단면의 치수에 비해 큰 구조물의 양단에 압축하중이 가해졌을 경우, 하중이 어느 크기에 이르면 기둥이 갑자기 휘는 현상을 말한다. 특히 긴 기둥이나 셸을 많이 사용하는 항공기, 차량, 선박, 건축물 등의 설계에서 좌굴 문제가 중요하며, 원통형 셸의 경우 gas와 같은 액체를 저장하는 압력용기로 사용될 뿐만 아니라 잠수함이나 항공기와 같이 외압을 받는 구조물에 사용된다. 이와 같이 다양한 분야에서 사용되는 셸 구조물은 그 두께가 길이에 비해 얇기 때문에 진동이나 좌굴에 취약한 특성을 보인다. 이러한 취약점을 해결하기 위해서는 우선 구조물에 작용하는 하중의 특성을 파악하고 문제가 발생하는 부분에 대해 구조물을 어떻게 보강할지 결정해야 한다.

일반적으로 좌굴 문제를 다룰 때 정적 하중만을 고려하지만 특수한 경우에 대해서는 동적 하중도 함께 고려해야만 한다. 예를 들어 초음속으로 운동하는 항공기나 탄도 미사일, 발사용 로켓과 지구 대기권 재돌입체 그리고 초공동 수중운동체의 경우 빠른 속도로 인해 축 방향으로 매우 큰 동적 압축하중이 작용하게 된다. 이러한 동적 압축하중으로 인하여 발생하는 좌굴을 동적 좌굴(dynamic buckling) 또는 매개변수 공진(parametric resonance)이라고 한다. 동적 좌굴이 발생하게 되면 구조물의 횡 방향 운동이 커지게 되고 이로 인해 구조물의 불안정성이 증가하여 치명적인 손상을 유발할 수 있다. 그러므로 동적 좌굴 현상을 방지하기 위해서는 이러한 하중이 작용하는 구조물에 대한 해석을 통해 구조물이 불안정해지는 영역을 파악하고 이를 고려하여 설계하는 것이 중요하다.

하지만 기존 상용유한요소해석 프로그램의 경우 정적 하중에 대한 정적 좌굴 해석만 가능하며, 동적 하중 또는 정적 하중과 동적 하중이 동시에 가해지는 경우에 대한 좌굴 해석이 불가능하다. 이에 본 논문에서는 축 방향의 동적 압축 하중을 받는 셸 구조물에 대해 동적 좌굴 해석을 하기 위한 유한요소해석 프로그램을 개발하였으며, 선형/비선형 정적 해석과 진동 및 정적 좌굴 해석을 통해 프로그램에 사용된 셸 요소의 신뢰

성을 확인하였다. 또한 다양한 모델에 대한 동적 좌굴 해석 결과를 이론적인 해나 실험을 통해 나온 결과와 비교함으로써 본 프로그램의 타당성을 검증하였다.



2. 이론

2.1 MITC4 Shell Element

셸 구조물을 유한요소 모델로 만들기 위해서 다양한 셸 요소 가운데 Bathe와 Dvorkin에 의해 개발된 MITC4라는 셸 요소를 선정하였다. MITC4 셸 요소는 3차원 솔리드 형상으로부터 셸 형상을 표현하므로 지배방정식의 유한요소 정식화가 다른 셸 요소에 비해 간단하다. 또한 셸 이론을 사용하지 않고 3차원 응력, 변형률을 사용하여 표현되며, 임의의 형상에 대한 두꺼운 셸과 얇은 셸 모두 적용 가능하다는 장점이 있다. 그리고 대 변형/회전(작은 변형률)과 재료 비선형에 모두 적용 가능하다. [1]

MITC4 셸 요소 내부의 임의의 점은 고유 좌표계(natural coordinate system)에 대해 정의 할 수 있으며, 위치 벡터는 식(2.1)과 (2.2)같이 나타낼 수 있다.

초기 형상($t=0$)에서

$$\mathbf{X} = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) {}^0\mathbf{X}_I + \frac{\zeta}{2} \sum_{I=1}^4 t_I N_I(\xi, \eta) {}^0\mathbf{V}_I^n \quad (2.1)$$

임의의 시간 t 에서

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) {}^t\mathbf{X}_I + \frac{\zeta}{2} \sum_{I=1}^4 t_I N_I(\xi, \eta) {}^t\mathbf{V}_I^n \quad (2.2)$$

이 때 $N_I(\xi, \eta)$ 는 형상함수이고, ${}^t\mathbf{X}_I$ 는 시간 t 일 때 노드 I 의 좌표를 나타내며, 시간 $t=0$ 이면 초기 형상에서 노드 I 의 좌표를 나타낸다. 그리고 t_I 는 노드 I 의 두께이고 ${}^t\mathbf{V}_I^n$ 은 시간 t 일 때 노드 I 의 두께방향의 법선 벡터(normal vector)를 나타내며, 시간 $t=0$ 이면 초기 형상에서 노드 I 의

두께방향의 법선 벡터를 나타낸다.

임의의 시간 t 에서의 MITC4 쉘 요소의 변위는 식(2.3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} &= \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) ({}^t\mathbf{X}_I - {}^0\mathbf{X}_I) + \frac{\zeta}{2} \sum_{I=1}^4 t_I N_I(\xi, \eta) ({}^t\mathbf{V}_I^n - {}^0\mathbf{V}_I^n) \\ &= \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) {}^t\mathbf{u}_I + \frac{\zeta}{2} \sum_{I=1}^4 t_I N_I(\xi, \eta) ({}^t\mathbf{V}_I^n - {}^0\mathbf{V}_I^n) \end{aligned} \quad (2.3)$$

임의의 시간 t 에서의 변위는 시간 t 일 때의 형상과 초기 형상의 차로부터 구할 수 있으며, 이 때 ${}^t\mathbf{u}_I$ 는 시간 t 일 때 노드 I 의 변위를 나타낸다. 그리고 이로부터 변위의 증분은 식(2.4)와 같이 나타낼 수 있다.

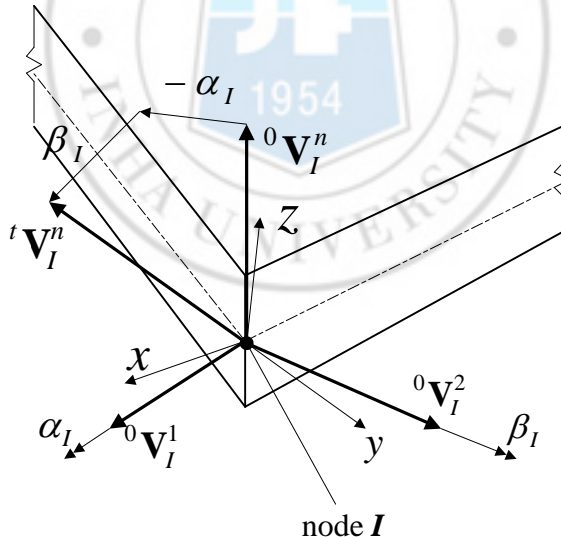


Fig. 1 Four-node shell element

$$\Delta\mathbf{u} = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \Delta\mathbf{u}_I + \frac{\zeta}{2} \sum_{I=1}^4 t_I N_I(\xi, \eta) (-\alpha_I {}^t\mathbf{V}_I^2 + \beta_I {}^t\mathbf{V}_I^1) \quad (2.4)$$

여기서 α 와 β 는 각각 \mathbf{V}^1 과 \mathbf{V}^2 방향 벡터의 회전각이고, 이 때 \mathbf{V}^1 과 \mathbf{V}^2 는 \mathbf{V}^n 으로부터 식(2.5)와 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{V}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_n}{\|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_n\|}, \quad \mathbf{V}^2 = \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}^1 \quad (2.5)$$

이 때 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 는 전역 직교 좌표계(global Cartesian coordinate system)의 기저(basis)이다. 그리고 만약 $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_n \approx 0$ 이라면, \mathbf{V}^1 과 \mathbf{V}^2 는 식(2.6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{V}^1 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{V}^2 = \mathbf{e}_1 \quad (2.6)$$

하지만 위와 같이 변위를 정의할 경우 일정한 굽힘 모멘트가 가해질 때 요소의 모든 점에서 횡 전단 변형률(transverse shear strain)이 영(零)이 될 수 없고, 이로 인해 얇은 형상에 대해 요소의 ‘잠김현상(locking phenomenon)’이 발생하게 된다. 그러므로 연속체 역학의 가정이 Kirchhoff 쉘의 가정을 포함할지라도 유한요소이산화를 통해 이러한 가정을 표현할 수가 없다. 이러한 결점을 해결하기 위해 MITC4 쉘 요소에서는 식(2.7)과 같은 횡 전단 변형률에 대한 보간법을 적용하였다. [1]

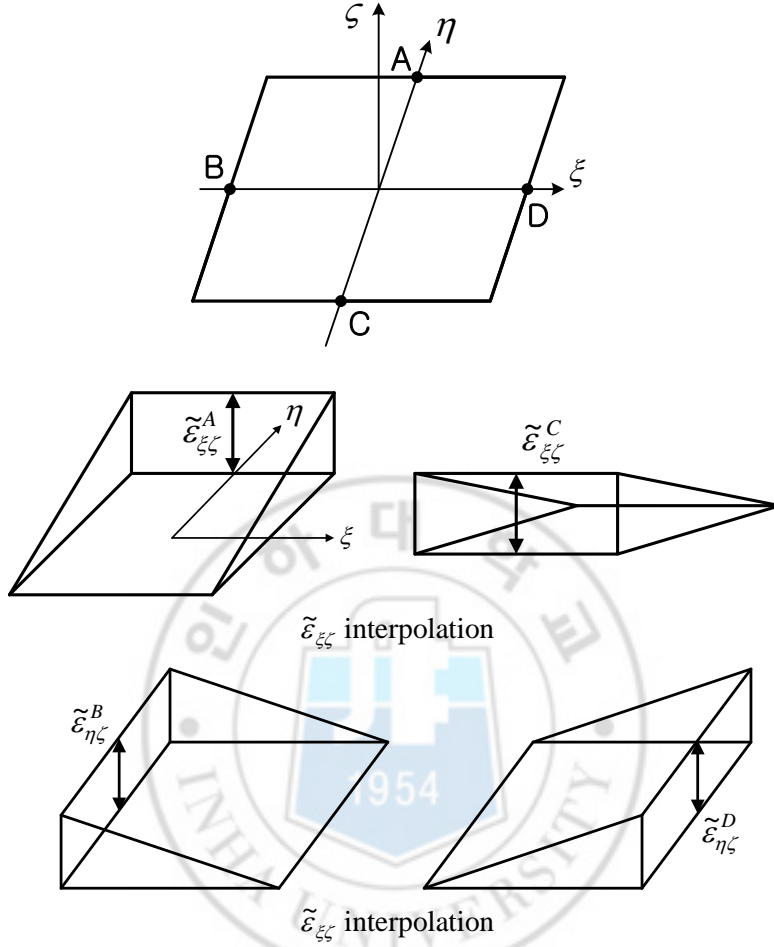


Fig. 2 Interpolation function for the transverse shear strains

$$\tilde{\epsilon}_{\xi\zeta} = \frac{1}{2}(1+\eta)\tilde{\epsilon}_{\xi\zeta}^A + \frac{1}{2}(1-\eta)\tilde{\epsilon}_{\xi\zeta}^C \quad (2.7a)$$

$$\tilde{\epsilon}_{\eta\zeta} = \frac{1}{2}(1+\xi)\tilde{\epsilon}_{\eta\zeta}^D + \frac{1}{2}(1-\xi)\tilde{\epsilon}_{\eta\zeta}^B \quad (2.7b)$$

2.2 Geometric Nonlinear Formulation

좌굴 해석을 하기 위해서는 기하 강성 행렬(geometric stiffness matrix)이 필요하며, 이를 구하기 위해 MITC4 셀 요소에 대한 비선형 유한요소 정식화 과정을 수행하였다.

현재 형상에 대한 평형방정식은 식(2.8)과 같다.

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.8)$$

식(2.8)에 가상 변위에 대한 현재 형상에서의 가상 일 정리를 사용하면, 식 (2.9)와 같이 쓸 수 있다.

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}) dV = \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.9)$$

식(2.9)를 인덱스를 사용하여 표현하면 식(2.10)과 같다.

$$\int_V \delta u_i \cdot \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right) dV = \int_V \delta u_i \cdot \rho \ddot{u}_i dV \quad (2.10)$$

이 때 식(2.11)을 식(2.10)에 대입하면 식(2.12)와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\delta u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\delta u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} \quad (2.11)$$

$$\int_V \frac{\partial (\delta u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \delta u_i \rho f_i dV = \int_V \delta u_i \cdot \rho \ddot{u}_i dV \quad (2.12)$$

식(2.12)에 가우스의 발산 정리(Gauss' divergence theorem)를 사용하면 식(2.13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\partial V} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \left(-\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \delta u_i \rho f_i \right) dV = \int_V \delta u_i \cdot \rho \ddot{u}_i dV \quad (2.13)$$

식(2.13)에서 좌측 첫 번째 항의 면 적분 부분은 식(2.14)와 같이 기하학적 경계조건(geometric boundary condition)과 자연적 경계조건(natural boundary condition)으로 나눌 수 있으며, 이 때 식(2.14)의 좌측 첫 번째 항은 기하학적 경계조건에서 가상변위가 영(零)이므로 생략할 수 있다.

$$\int_{\partial V_g} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_{\partial V_m} \delta u_i \bar{t}_i dA + \int_V \left(-\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \delta u_i \rho f_i \right) dV = \int_V \delta u_i \cdot \rho \ddot{u}_i dV \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \sigma_{ij} = \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} \quad (2.15)$$

그리고 식(2.14)에 식(2.15)를 대입하여 정리하면 현재 형상에서의 가상 일에 대한 식을 식(2.16)과 같이 얻을 수 있다.

$$\int_{\partial V_m} \delta u_i \bar{t}_i dA + \int_V \delta u_i \rho f_i dV = \int_V \delta u_i \cdot \rho \ddot{u}_i dV + \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (2.16)$$

식(2.16)에서 좌변은 외력에 의한 가상 일이고, 우변은 내력에 의한 가상 일이다.

비선형 해석을 수행하기 위해서는 Total Lagrangian 기법과 Updated Lagrangian 기법이 있으며, 전자의 방법은 문제를 초기 형상에 대해 정의하는 방법이고, 후자의 방법은 현재 형상에 대해 정의하는 방법이다. 본 논문에서는 전자의 방법을 사용하였으며, 식(2.17)을 사용하여 변형된 현재 형상의 응력과 변형률 등을 초기 형상에 대해 정의하였다.

$$\int_V (A) dV = \int_{V_0} (A) \det(\mathbf{F}) dV_0 = \int_{V_0} (A) J dV_0 \quad (2.17a)$$

$$\int_{\partial V} (A) \mathbf{n} dA = \int_{\partial V_0} (A) J \mathbf{F}^{-T} \tilde{\mathbf{n}} dA_0 \quad (\text{Nanson's formular}) \quad (2.17b)$$

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{V_0} \delta \mathbf{F} : \mathbf{P} dV_0 = \int_{V_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} dV_0 \quad (2.17c)$$

이 때 (A) 는 임의의 값을 의미하고, \mathbf{F} 는 변형 구배(deformation gradient), J 는 자코비안(Jacobian)으로 체적변화율을 나타낸다. 그리고 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 과 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 현재 형상에서의 미소 변형률(infinitesimal strain)과 Cauchy 응력을 의미하고, \mathbf{E} 는 Green-Lagrange 변형률로써 초기 형상에서 정의된다. \mathbf{P} 는 1차 Piola-Kirchhoff 응력을 나타내고, \mathbf{S} 는 2차 Piola-Kirchhoff 응력을 나타내며, 두 응력 모두 초기 형상에서 정의된다.

식(2.17)을 사용하여 식(2.16)을 초기 형상에 대해 정의해주면 식(2.18)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{V_0} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} dV_0 + \int_{V_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} dV_0 = \int_{\partial V_{0m}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{n}} dA_0 + \int_{V_0} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \mathbf{f} dV_0 \quad (2.18a)$$

$$\Leftrightarrow \int_{V_0} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} dV_0 + \int_{V_0} \delta \mathbf{F} : \mathbf{P} dV_0 = \int_{\partial V_{0m}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \tilde{\mathbf{n}} dA_0 + \int_{V_0} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \mathbf{f} dV_0 \quad (2.18b)$$

식(2.18b)는 1차 Piola-Kirchhoff 응력으로 표현한 식이고, 식(2.18a)는 2차 Piola-Kirchhoff 응력으로 표현한 식이다. 본 논문에서는 2차 Piola-Kirchhoff 응력을 사용한 식(2.18a)를 사용하였다.

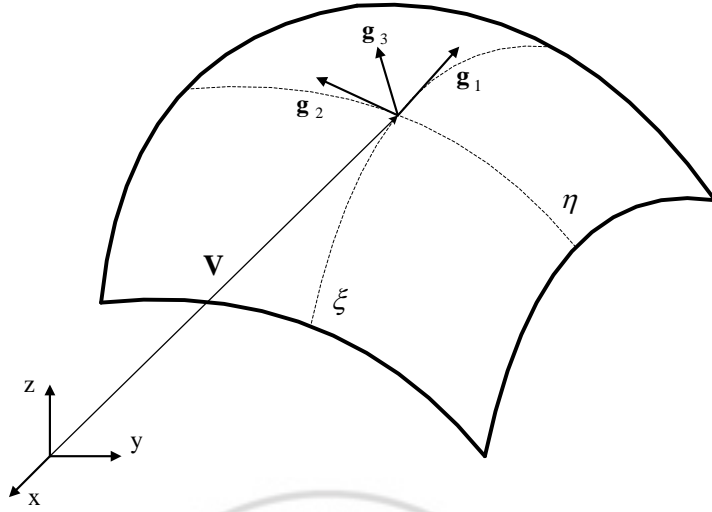


Fig. 3 An arbitrary surface with global Cartesian coordinate system(x, y, z), natural coordinate system (ξ, η, ζ) and local covariant coordinate system spanned by \mathbf{g}_i

고유 좌표계(natural coordinate system)에서 공변 기저(covariant basis)는 식(2.19)와 같이 나타낼 수 있고, 변위에 대한 기울기(gradient)를 고유 좌표계와 반공변 기저(contravariant basis)를 사용하여 표현하면 식(2.20)과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} \quad (2.19)$$

$$\nabla \otimes \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \otimes \mathbf{g}^i \quad (2.20)$$

변형률은 식(2.20)을 사용하여 식(2.21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \otimes \mathbf{g}^i + \mathbf{g}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \right] \quad (2.21)$$

그리고 변형률 텐서(strain tensor)에서 공변 성분(covariant component)을

얻기 위해 변형률 텐서 좌우에 공변 기저(covariant basis)를 내적하면, 식(2.22)와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{pq} &= \mathbf{g}_p \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{g}_q \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_p \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \otimes \mathbf{g}^i + \mathbf{g}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \right] \cdot \mathbf{g}_q \\
 &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{g}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^p} \cdot \mathbf{g}_q \right]
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

그리고 식(2.22)를 식(2.19)를 사용하여 표현하면 변형률 텐서의 공변 성분(covariant component)은 식(2.23)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_{pq} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^p} \right] \tag{2.23}$$

이와 같은 방법으로 Green-Lagrange 변형률을 표현하기 위해서 우선 Green-Lagrange 변형률은 식(2.24)와 같이 정의 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})^T}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{I} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left[\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \left[\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] - \mathbf{I} \right) = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right]^T + \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \otimes \mathbf{G}^i + \mathbf{G}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} \right) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \right)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

그리고 Green-Lagrange 변형률 텐서에서 공변 성분(covariant component)을 얻기 위해 Green-Lagrange 변형률 텐서 좌우에 공변 기저(covariant basis)를 내적하면, 식(2.25)와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
E_{pq} &= \mathbf{G}_p \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}_q \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{G}_p \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \otimes \mathbf{G}^i + \mathbf{G}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} \right) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \right) \cdot \mathbf{G}_q \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{G}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^p} \cdot \mathbf{G}_q \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^q} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

식(2.25)를 변위에 대한 증분형태(incremental form)로 나타내기 위해 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u}$ 을 대입하여 정리하면, 식(2.26)와 같은 결과를 얻을 수 있다. 이 때 식(2.26)의 첫 번째 항은 $\Delta \mathbf{u}$ 에 대한 상수 항이고, 두 번째 항은 $\Delta \mathbf{u}$ 에 대한 선형 항 그리고 세 번째 항은 $\Delta \mathbf{u}$ 에 대한 비선형 항을 나타내며, 이를 간략하게 기호로 표시하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
E_{pq} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) \\
&= E_{0_{pq}} + \Delta E_{pq} + \Delta^2 E_{pq}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

가상 일에 대한 변형률을 구하기 위해 Green-Lagrange 변형률에 변분(variation)을 취하면 식(2.27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \right] + \left[\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \right]^T + \left[\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \left[\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^i} \otimes \mathbf{G}^i + \mathbf{G}^i \otimes \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^i} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} \right) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^j} \right) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \right) \quad (2.27)
\end{aligned}$$

위와 마찬가지로 Green-Lagrange 변형률 텐서에서 공변 성분(covariant component)을 얻기 위해 식(2.27)의 좌우에 공변 기저(covariant basis)를 내적하면, 식(2.28)과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\delta E_{pq} &= \mathbf{G}_p \cdot \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}_q \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{G}_p \cdot \left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^i} \otimes \mathbf{G}^i + \mathbf{G}^i \otimes \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^i} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} \right) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^j} \right) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \right) \cdot \mathbf{G}_q \quad (2.28) \\
&= \frac{1}{2} \left(\mathbf{G}_p \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} + \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \mathbf{G}_q + \left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} + \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^q} + \left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) \right)
\end{aligned}$$

식(2.28)을 변위에 대한 증분형태로 나타내기 위해 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}$ 을 대입하여 정리하면, 식(2.29)와 같은 결과를 얻을 수 있다. 이 때 식(2.29)의 첫 번째 항은 $\Delta \mathbf{u}$ 에 대한 상수 항이고, 두 번째 항은 $\Delta \mathbf{u}$ 에 대한 선형 항을 나타내며, 이를 기호로 간략하게 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다. 여기서 \mathbf{u}_i 는 고정된 값이므로 \mathbf{u}_i 에 대한 변분(variation)은 영(零)이 된다.

$$\begin{aligned}
\delta E_{pq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} + \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^q} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial(\mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial(\mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} + \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^q} + \left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&= \delta(E_{0_{pq}} + \Delta E_{pq} + \Delta^2 E_{pq}) \\
&= \delta \Delta E_{pq} + \delta \Delta^2 E_{pq} \\
&= \delta \mathcal{E}_{0_{pq}} + \delta \Delta \mathcal{E}_{pq}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

식(2.28)과 식(2.29)의 결과를 식(2.18a)의 $\int_{V_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} dV_0$ 항에 대입하면 식(2.30)과 같이 정리할 수 있다. 이 때 식(2.30)의 첫 번째 항은 상수 항이고, 두 번째 항은 선형 항, 세 번째 항은 고차 항이며, 네 번째 항은 선형 항, 다섯 번째와 여섯 번째 항은 고차 항을 나타낸다.

$$\begin{aligned}
\int_{V_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} dV_0 &= \int_{V_0} \delta E_{ij} S^{ij} dV_0 = \int_{V_0} \delta E_{ij} C^{ijkl} E_{kl} dV_0 \\
&= \int_{V_0} (\delta \mathcal{E}_{0_{ij}} + \delta \Delta \mathcal{E}_{ij}) C^{ijkl} (E_{0_{kl}} + \Delta E_{kl} + \Delta^2 E_{kl}) dV_0 \\
&= \int_{V_0} (\delta \mathcal{E}_{0_{ij}}) C^{ijkl} (E_{0_{kl}}) dV_0 + \int_{V_0} (\delta \mathcal{E}_{0_{ij}}) C^{ijkl} (\Delta E_{kl}) dV_0 \\
&\quad + \int_{V_0} (\delta \mathcal{E}_{0_{ij}}) C^{ijkl} (\Delta^2 E_{kl}) dV_0 + \int_{V_0} (\delta \Delta \mathcal{E}_{ij}) C^{ijkl} (E_{0_{kl}}) dV_0 \\
&\quad + \int_{V_0} (\delta \Delta \mathcal{E}_{ij}) C^{ijkl} (\Delta E_{kl}) dV_0 + \int_{V_0} (\delta \Delta \mathcal{E}_{ij}) C^{ijkl} (\Delta^2 E_{kl}) dV_0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

따라서 식(2.30)에서 고차 항을 제외하면 식(2.31)과 같은 결과를 얻을 수 있으며, 첫 번째 항은 상수 항이고, 두 번째와 세 번째 항은 선형

항을 나타낸다.

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \delta E_{ij} S^{ij} dV_0 &\approx \int_{V_0} (\delta \mathcal{E}_{0_{ij}}) C^{ijkl} (E_{0_{kl}}) dV_0 + \int_{V_0} (\delta \mathcal{E}_{0_{ij}}) C^{ijkl} (\Delta E_{kl}) dV_0 \\ &+ \int_{V_0} (\delta \Delta \mathcal{E}_{ij}) C^{ijkl} (E_{0_{kl}}) dV_0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

앞서 정의한 MITC4 쉘 요소의 위치 벡터 식(2.1), (2.2)를 행렬 형태로 표현하면 식(2.32), (2.33)과 같이 나타낼 수 있고, 이를 간단하게 기호로 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다. 이 때 $\mathbf{1}_3$ 은 3행 3열의 단위 행렬(identity matrix)을 나타낸다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left[N_1 \mathbf{1}_3 \quad \frac{\zeta}{2} t_1 N_1 \mathbf{1}_3 \quad N_2 \mathbf{1}_3 \quad \frac{\zeta}{2} t_2 N_2 \mathbf{1}_3 \quad N_3 \mathbf{1}_3 \quad \frac{\zeta}{2} t_3 N_3 \mathbf{1}_3 \quad N_4 \mathbf{1}_3 \quad \frac{\zeta}{2} t_4 N_4 \mathbf{1}_3 \right] \left\{ \begin{array}{l} {}^0 \mathbf{X}_1 \\ {}^0 \mathbf{V}_1^n \\ {}^0 \mathbf{X}_2 \\ {}^0 \mathbf{V}_2^n \\ {}^0 \mathbf{X}_3 \\ {}^0 \mathbf{V}_3^n \\ {}^0 \mathbf{X}_4 \\ {}^0 \mathbf{V}_4^n \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{S} \mathbf{X}_0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left[N_1 \mathbf{1}_3 \quad \frac{\zeta}{2} t_1 N_1 \mathbf{1}_3 \quad N_2 \mathbf{1}_3 \quad \frac{\zeta}{2} t_2 N_2 \mathbf{1}_3 \quad N_3 \mathbf{1}_3 \quad \frac{\zeta}{2} t_3 N_3 \mathbf{1}_3 \quad N_4 \mathbf{1}_3 \quad \frac{\zeta}{2} t_4 N_4 \mathbf{1}_3 \right] \left\{ \begin{array}{l} {}^t \mathbf{X}_1 \\ {}^t \mathbf{V}_1^n \\ {}^t \mathbf{X}_2 \\ {}^t \mathbf{V}_2^n \\ {}^t \mathbf{X}_3 \\ {}^t \mathbf{V}_3^n \\ {}^t \mathbf{X}_4 \\ {}^t \mathbf{V}_4^n \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{S} \mathbf{X}_t \end{aligned} \quad (2.33)$$

또한 임의의 시간 t 에서의 변위 식(2.3)과 변위의 증분 식(2.4)를 행렬 형태로 표현하면 식(2.34), (2.35)로 각각 나타낼 수 있고, 이를 간략하게 기호로 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

$$= \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{1}_3 & \frac{\zeta}{2} t_1 N_1 \mathbf{1}_3 & N_2 \mathbf{1}_3 & \frac{\zeta}{2} t_2 N_2 \mathbf{1}_3 & N_3 \mathbf{1}_3 & \frac{\zeta}{2} t_3 N_3 \mathbf{1}_3 & N_4 \mathbf{1}_3 & \frac{\zeta}{2} t_4 N_4 \mathbf{1}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t \mathbf{X}_1 - {}^0 \mathbf{X}_1 \\ {}^t \mathbf{V}_1^n - {}^0 \mathbf{V}_1^n \\ {}^t \mathbf{X}_2 - {}^0 \mathbf{X}_2 \\ {}^t \mathbf{V}_2^n - {}^0 \mathbf{V}_2^n \\ {}^t \mathbf{X}_3 - {}^0 \mathbf{X}_3 \\ {}^t \mathbf{V}_3^n - {}^0 \mathbf{V}_3^n \\ {}^t \mathbf{X}_4 - {}^0 \mathbf{X}_4 \\ {}^t \mathbf{V}_4^n - {}^0 \mathbf{V}_4^n \end{Bmatrix}$$

$$= \mathbf{S}(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0) \quad (2.34)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{1}_3 - \frac{\zeta}{2} t_1 N_1 {}^t \mathbf{V}_1^2 & \frac{\zeta}{2} t_1 N_1 {}^t \mathbf{V}_1^1 & \cdots & N_4 \mathbf{1}_3 - \frac{\zeta}{2} t_4 N_4 {}^t \mathbf{V}_4^2 & \frac{\zeta}{2} t_4 N_4 {}^t \mathbf{V}_4^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \Delta \mathbf{u}_3 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \Delta \mathbf{u}_4 \\ \alpha_4 \\ \beta_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \mathbf{N}(\Delta \mathbf{U}) \quad (2.35)$$

이 때 \mathbf{V}^n 이 현재 형상의 변화에 따라 변하므로 \mathbf{V}^1 과 \mathbf{V}^2 도 계속

변하게 되고, 행렬 \mathbf{N} 도 현재 형상에 따라 변하게 된다. 즉 \mathbf{V}^1 과 \mathbf{V}^2 는 회전각 α, β 에 따라 회전하게 되고, 두 축의 회전에 의해 \mathbf{V}^n 이 시간에 따라 변하게 된다. 따라서 시간에 따른 회전각 α, β 의 변화에 따라 \mathbf{V}^n 을 계산해 주어야 하고, 또한 그에 따라 \mathbf{V}^1 과 \mathbf{V}^2 도 다시 계산해 주어야 한다. 이에 대한 자세한 내용은 2.2.1 절에서 다루도록 하겠다.

식(2.32), (2.33), (2.34), (2.35)의 행렬식을 식(2.31)에서 $\delta E_{0_{pq}}, \delta \Delta E_{pq}, E_{0_{pq}}, \Delta E_{pq}$ 의 각각의 항에 대입하면 식(2.36), (2.37), (2.38), (2.39)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 E_{0_{pq}} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_0\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi^p} \right] \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi^q} \right] \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\} \\
 &= \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_0\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi^p} \right] \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\}^T \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi^p} \right] \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\} \\
 &= \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t + \mathbf{X}_0\}^T \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi^p} \right] \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\} \\
 &= \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t + \mathbf{X}_0\}^T [\mathbf{e}_{pq}] \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{pq} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}_t)}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_0\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^p} \right] \{\Delta \mathbf{U}\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^p} \right] \{\Delta \mathbf{U}\} \\
&= \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^p} \right] \{\Delta \mathbf{U}\} \\
&= \{\mathbf{X}_t\}^T [\mathbf{a}_{pq}] \{\Delta \mathbf{U}\}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
\delta \Delta E_{pq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} + \frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^q} + \left(\frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_0\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^p} \right] \{\delta \mathbf{U}\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^p} \right] \{\delta \mathbf{U}\} \\
&= \frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^p} \right] \{\delta \mathbf{U}\} \\
&= \{\mathbf{X}_t\}^T [\mathbf{a}_{pq}] \{\delta \mathbf{U}\}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
\delta \Delta \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi^q} \right) + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \xi^q} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \{\delta \mathbf{U}\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi^p} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi^q} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^p} \right] \{\Delta \mathbf{U}\} \\
&= \{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{c}_{pq}] \{\Delta \mathbf{U}\}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

식(2.36), (2.37), (2.38), (2.39)을 식(2.31)에 대입하면 식(2.40)과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\int_{V_0} \delta E_{ij} S^{ij} dV_0 &\approx \int_{V_0} (\{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{a}_{ij}]^T \{\mathbf{X}_t\}) C^{ijkl} \left(\frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t + \mathbf{X}_0\}^T [\mathbf{e}_{kl}] \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\} \right) dV_0 \\
&+ \int_{V_0} (\{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{a}_{ij}]^T \{\mathbf{X}_t\}) C^{ijkl} (\{\mathbf{X}_t\}^T [\mathbf{a}_{kl}] \{\Delta \mathbf{U}\}) dV_0 \\
&+ \int_{V_0} (\{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{c}_{ij}] \{\Delta \mathbf{U}\}) C^{ijkl} \left(\frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t + \mathbf{X}_0\}^T [\mathbf{e}_{kl}] \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\} \right) dV_0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

그리고 현재 형상($t=0$)일 때의 2차 Piola-Kirchhoff 응력을 식(2.41)과 같이 정의해주면, 식(2.40)은 식(2.42)와 같이 정리할 수 있다.

$$S_0^{ij} = C^{ijkl} \left(\frac{1}{2} \{\mathbf{X}_t + \mathbf{X}_0\}^T [\mathbf{e}_{kl}] \{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0\} \right) \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
\int_{V_0} \delta E_{ij} S^{ij} dV_0 &\approx \int_{V_0} (\{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{a}_{ij}]^T \{\mathbf{X}_t\}) S_0^{ij} dV_0 \\
&+ \int_{V_0} (\{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{a}_{ij}]^T \{\mathbf{X}_t\}) C^{ijkl} (\{\mathbf{X}_t\}^T [\mathbf{a}_{kl}] \{\Delta \mathbf{U}\}) dV_0 \\
&+ \int_{V_0} (\{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{c}_{ij}] \{\Delta \mathbf{U}\}) S_0^{ij} dV_0 \\
&= \{\delta \mathbf{U}\}^T \left[\int_{V_0} (S_0^{ij} [\mathbf{a}_{ij}]^T) dV_0 \right] \{\mathbf{X}_t\} \\
&+ \{\delta \mathbf{U}\}^T \left[\int_{V_0} ([\mathbf{a}_{ij}]^T \{\mathbf{X}_t\}) C^{ijkl} (\{\mathbf{X}_t\}^T [\mathbf{a}_{kl}]) dV_0 \right] \{\Delta \mathbf{U}\} \\
&+ \{\delta \mathbf{U}\}^T \left[\int_{V_0} (S_0^{ij} [\mathbf{c}_{ij}]) dV_0 \right] \{\Delta \mathbf{U}\}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

식(2.42)를 고유 좌표계(natural coordinate system)에서 $2 \times 2 \times 2$ 가우스 적분(Gauss integration)해주면, 식(2.43)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \int_{V_0} \delta E_{ij} S^{ij} dV_0 \\
& \approx \{\delta \mathbf{U}\}^T \left[\iiint_{\xi} (S_0^{ij} [\mathbf{a}_{ij}]^T) |J| d\xi d\eta d\zeta \right] \{\mathbf{X}_t\} \\
& + \{\delta \mathbf{U}\}^T \left[\iiint_{\xi} ([\mathbf{a}_{ij}]^T \{\mathbf{X}_t\}) [T]^T [\tilde{D}^{ijkl}] [T] (\{\mathbf{X}_t\}^T [\mathbf{a}_{kl}]) |J| d\xi d\eta d\zeta \right] \{\Delta \mathbf{U}\} \quad (2.43) \\
& + \{\delta \mathbf{U}\}^T \left[\iiint_{\xi} (S_0^{ij} [\mathbf{c}_{ij}]) |J| d\xi d\eta d\zeta \right] \{\Delta \mathbf{U}\} \\
& = \{\delta \mathbf{U}\}^T \{\mathbf{F}\} \{\mathbf{X}_t\} + \{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{K}_{NL}] \{\Delta \mathbf{U}\} + \{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{K}_L] \{\Delta \mathbf{U}\}
\end{aligned}$$

여기서 \mathbf{K}_L 은 초기 변위와 관련된 강성 행렬(initial displacement stiffness matrix), \mathbf{K}_{NL} 은 초기 응력과 관련된 강성 행렬(initial stress stiffness matrix) 또는 기하 강성 행렬(geometric stiffness matrix)이고, \mathbf{F} 는 변형으로 인한 힘 벡터를 나타내며, $|J|$ 는 자코비안 행렬(Jacobian matrix)에 대한 determinant를 의미한다. 그리고 \tilde{D}^{ijkl} 는 지역 직교 좌표계(local Cartesian coordinate system)에서 정의되어있는 구성 행렬(constitutive matrix)로 이를 고유 좌표계(natural coordinate system)로 변환해주기 위해 변환 행렬(transformation matrix) $[T]$ 를 사용하였다. 이에 대한 자세한 내용은 2.2.2 절에서 다루도록 하겠다.

식(2.18a) 우변은 표면력(surface force)과 체적력(body force)을 나타내며, 식(2.44), (2.45)와 같이 이산화하여 나타낼 수 있다.

$$\int_{\partial V_{0m}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{n}} dA_0 = \{\delta \mathbf{U}\}^T \int_{\partial V_{0m}} [\mathbf{N}]^T \{\bar{\mathbf{T}}\} dA_0 = \{\delta \mathbf{U}\}^T \{\mathbf{Q}_T\} \quad (2.44)$$

$$\int_{V_0} \delta \mathbf{u} \rho_0 \mathbf{f} dV_0 = \{\delta \mathbf{U}\}^T \int_{V_0} \rho_0 [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}\} dV_0 = \{\delta \mathbf{U}\}^T \{\mathbf{Q}_B\} \quad (2.45)$$

식(2.43), (2.44), (2.45)을 식(2.18a)에 대입하고, 정적인 문제이므로 시간에 대한 항을 무시하면, 식(2.18a)는 식(2.46)과 같이 표현할 수 있다.

$$0 = \{\delta \mathbf{U}\}^T ([\mathbf{K}_{NL}] + [\mathbf{K}_L])\{\Delta \mathbf{U}\} - \{\delta \mathbf{U}\}^T (\{\mathbf{Q}_T\} + \{\mathbf{Q}_B\} - \{\mathbf{F}\}) \quad (2.46)$$

이때 $\delta \mathbf{U}$ 는 임의의 값이므로 식(2.46)을 만족하기 위해서는 식(2.47)과 같이 쓸 수 있고, 식(2.47)은 Newton-Raphson 형식으로 $\Delta \mathbf{U}$ 에 대한 반복 계산을 통해 수렴값을 찾아 나감으로써 비선형 해석을 수행할 수 있다.

$$([\mathbf{K}_{NL}] + [\mathbf{K}_L])\{\Delta \mathbf{U}\} = \{\mathbf{Q}_T\} + \{\mathbf{Q}_B\} - \{\mathbf{F}\} \quad (2.47)$$

여기서 \mathbf{K}_{NL} 과 \mathbf{K}_L 의 합이 기울기 강성 행렬(tangent stiffness matrix)이 된다.

2.2.1 Finite Rotation Formulation

셀의 형상이 변함에 따라 각각의 노드에서 정의 된 벡터 ($\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \mathbf{V}^n$) 역시 시간에 따라 변하게 된다. 즉 시간에 따른 회전각 α, β 의 변화에 따라 \mathbf{V}^n 이 변하고, 또한 그에 따라 \mathbf{V}^1 과 \mathbf{V}^2 도 변하게 된다. 이를 관계식으로 표현하면, 식(2.48)과 같이 쓸 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_I^n = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_I \cdot {}^t \mathbf{V}_I^n \quad (2.48)$$

식(2.48)은 시간이 t 부터 $t+\Delta t$ 까지 변할 때 노드 I 에서의 법선 벡터의 변화를 보여주는 식으로 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_I$ 는 회전 텐서(rotation tensor)를 의미하며, $\|{}^t \mathbf{V}_I^n\| = \|{}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_I^n\| = 1$ 이다. [9]

그리고 회전 텐서 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_I$ 은 $\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \mathbf{V}^n$ 을 정규직교 기저(orthonormal basis)로 하는 좌표계에서 식(2.49)와 같이 행렬 형태로 나타낼 수 있다. [10]

$$[{}^{t+\Delta t}_t R_I] = [\mathbf{1}_3] + \frac{\sin(\tilde{\theta}_I)}{\tilde{\theta}_I} [\Theta_I] + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\tilde{\theta}_I/2)}{(\tilde{\theta}_I/2)} \right]^2 [\Theta_I]^2 \quad (2.49)$$

이 때 $[\mathbf{1}_3]$ 은 3행 3열의 단위 행렬을 의미하며, $\tilde{\theta}_I$ 와 $[\Theta_I]$ 는 각각 식(2.50), (2.51)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\theta}_I = [(\alpha_I)^2 + (\beta_I)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

$$[\Theta_I] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_I \\ 0 & 0 & -\alpha_I \\ -\beta_I & \alpha_I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

여기서 α_I 와 β_I 가 미소 증분 회전(infinitesimal incremental rotation)이면, 각각 \mathbf{V}^1 , \mathbf{V}^2 에 대한 독립적인 미소 회전(independent infinitesimal rotation)을 의미하고, α_I 와 β_I 가 유한 증분 회전(finite incremental rotation)이면, α_I 와 β_I 는 서로 독립적이지 않으며 회전 텐서를 정의하는 변수가 된다. [9]

2.2.2 Constitutive Matrix

구성 행렬(constitutive matrix)의 경우 평면응력(plane stress) 가정을 사용하였으며, 식(2.52)와 같다. 이 때 κ 는 전단 보정 계수(shear correction factor)로 5/6를 사용하였다.

$$[\tilde{D}]_{xyz} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

하지만 식(2.52)의 경우 지역 직교 좌표계(local Cartesian coordinate system)에서 정의되므로 이를 고유 좌표계(natural coordinate system)에서 정의하기 위해서는 변환 행렬(transformation matrix)을 사용해야 한다.

지역 직교 좌표계와 고유 좌표계 사이의 관계는 Fig. 4와 같으며, 여기서 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ 는 고유 좌표계의 공변 기저(covariant basis)이고, $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ 는 지역 직교 좌표계의 기저를 의미한다.

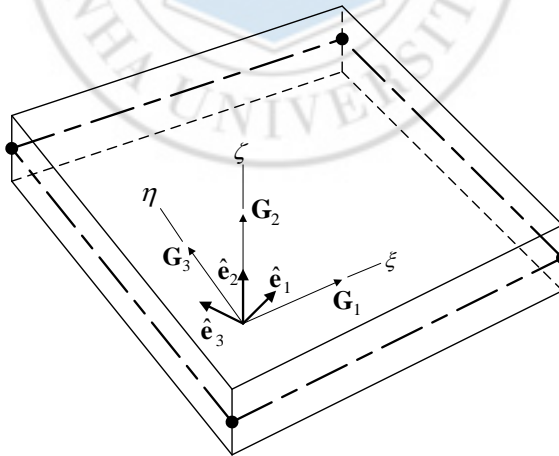


Fig. 4 Local Cartesian coordinate system

변형률과 응력에 대한 좌표변환은 식(2.53), (2.54)와 같으며, 이로부터

구성 행렬의 좌표변환은 식(2.55)와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 \tilde{E} , \tilde{S} , \tilde{D} 와 E , S , D 는 각각 지역 직교 좌표계와 고유 좌표계에서의 변형률, 응력, 구성 행렬을 의미한다. 그리고 $[T]_{\xi \rightarrow x}$ 는 고유 좌표계에서 정의된 값을 지역 직교 좌표계로 변환해주는 변환 행렬이다.

$$\{\tilde{E}\}_{xyz} = [T]_{\xi \rightarrow x} \{E\}_{\xi\eta\zeta} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \{S\}_{\xi\eta\zeta} &= [T]_{x \rightarrow \xi} \{\tilde{S}\}_{xyz} = [T]_{\xi \rightarrow x}^T [\tilde{D}]_{xyz} \{\tilde{E}\}_{xyz} \\ &= [T]_{\xi \rightarrow x}^T [\tilde{D}]_{xyz} [T]_{\xi \rightarrow x} \{E\}_{\xi\eta\zeta} = [D]_{\xi\eta\zeta} \{E\}_{\xi\eta\zeta} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$[D]_{\xi\eta\zeta} = [T]_{\xi \rightarrow x}^T [\tilde{D}]_{xyz} [T]_{\xi \rightarrow x} \quad (2.55)$$

이 때 $[T]_{\xi \rightarrow x}$ 는 식(2.56)과 같이 나타낼 수 있고, 각각의 성분은 식(2.57)과 같다.

$$[T]_{\xi \rightarrow x} = \begin{bmatrix} a_1 a_1 & b_1 b_1 & c_1 c_1 & b_1 c_1 & a_1 c_1 & a_1 b_1 \\ a_2 a_2 & b_2 b_2 & c_2 c_2 & b_2 c_2 & a_2 c_2 & a_2 b_2 \\ a_3 a_3 & b_3 b_3 & c_3 c_3 & b_3 c_3 & a_3 c_3 & a_3 b_3 \\ 2a_2 a_3 & 2b_2 b_3 & 2c_2 c_3 & b_2 c_3 + c_2 b_3 & a_2 c_3 + c_2 a_3 & a_2 b_3 + b_2 a_3 \\ 2a_1 a_3 & 2b_1 b_3 & 2c_1 c_3 & b_1 c_3 + c_1 b_3 & a_1 c_3 + c_1 a_3 & a_1 b_3 + b_1 a_3 \\ 2a_1 a_2 & 2b_1 b_2 & 2c_1 c_2 & b_1 c_2 + c_1 b_2 & a_1 c_2 + c_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{G}^1 & b_1 &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{G}^2 & c_1 &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{G}^3 \\ a_2 &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{G}^1 & b_2 &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{G}^2 & c_2 &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{G}^3 \\ a_3 &= \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{G}^1 & b_3 &= \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{G}^2 & c_3 &= \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{G}^3 \end{aligned} \quad (2.57)$$

그리고 지역 직교 좌표계의 기저 $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$ 는 식(2.58)와 같이 고유 좌표계의 공변 기저(covariant basis) \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 , \mathbf{G}_3 로부터 구할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{G}_3}{\|\mathbf{G}_3\|}, \quad \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{G}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3}{\|\mathbf{G}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3\|}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (2.58)$$

2.2.3 Mass Matrix

질량 행렬(mass matrix)은 물체 내에 연속적으로 분포되어 있는 물체의 질량을 요소망 내 각 절점(node)에 집중 질량(lumped mass) 형식으로 이산화시켜 놓은 것으로, 이 질량 행렬 내 각 행렬요소를 합하면, 물체의 전체 질량과 같게 되며, 물체의 자중, 운동량, 관성력을 표현한다.

진동 및 동적 좌굴 해석을 하기 위해서는 이러한 질량 행렬이 필요하며, 일반적으로 일관 질량 행렬(consistent mass matrix)과 집중 질량 행렬(lumped mass matrix)있다. 일관 질량 행렬은 식(2.59)와 같이 나타낼 수 있다.[2] 여기서 ρ 는 밀도, \mathbf{N} 은 형상 함수 행렬을 나타낸다.

$$[\tilde{\mathbf{M}}] = \int_V \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV \quad (2.59)$$

집중 질량 행렬의 경우 일관 질량 행렬을 대각화(diagonalization) 함으로써 연산에 필요한 용량과 연산 시간을 줄일 수 있다는 장점이 있지만[2] 본 논문에서는 물체의 강성을 줄임으로써 유연한 결과를 얻기 위해 집중 질량 행렬을 사용하였다. 일관 질량 행렬을 대각화하는 방법에는 다양한 방법들이 존재하며, 본 논문에서는 각각의 행을 합하는 방법(row-sum technique)을 사용하였다.[3] 식(2.60)으로부터 각각의 요소에 대한 일관 질량 행렬 $\tilde{\mathbf{M}}$ 의 행의 합을 구한다. 그리고 이를 식(2.61)과 같이 새로운 집중 질량 행렬 \mathbf{M} 의 대각항(diagonal entries)에 대입하고, 비대각항(off-diagonal entries)은 영(零)을 대입한다. 이 때 n 은 요소의 절점의 개수와 자유도의 곱을 나타낸다.

$$S(i) = \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{M}}(i, j) \quad \text{for } i = 1, n \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(i, j) &= S(i) & \text{for } i = 1, n \\ \mathbf{M}(i, j) &= 0 & \text{for } i \neq j \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.2.4 6-DOF Shell Element

일반적으로 쉘 요소는 5개의 자유도(degree of freedom)를 사용하며, 법선 벡터(normal vector)는 각 절점당 하나의 법선 벡터를 갖는다. 하지만 쉘 요소를 보강재(stiffener)로 사용하는 경우, 쉘 요소와 쉘 요소의 결합을 위해서는 6개의 자유도가 필요하며, 이와 더불어 각 절점에서 정의되는 법선 벡터에 대한 구속 조건이 필요하다. 이에 본 논문에서는 각 절점에서 정의되는 지역 좌표계(local coordinate system)를 전역 직교 좌표계(global Cartesian coordinate system)로 변환해 줌으로써 쉘 요소와 쉘 요소의 결합을 구성하였다. 이 때 지역 좌표계는 \mathbf{V}^1 , \mathbf{V}^2 , \mathbf{V}^n 을 기저로 하는 좌표계로 표현된다.

전역 직교 좌표계에서 정의되는 회전 자유도 θ_1 , θ_2 , θ_3 와 지역 좌표계에 의해 정의되는 회전 자유도 α , β , γ 는 식(2.62)와 같은 관계식을 만족해야 한다.

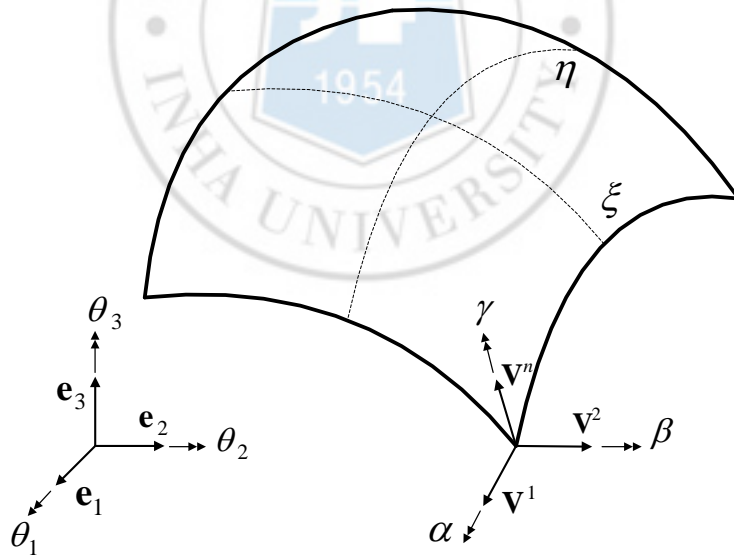


Fig. 5 Global Cartesian coordinate system and local coordinate system

$$\theta_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2 + \theta_3 \mathbf{e}_3 = \alpha \mathbf{V}^1 + \beta \mathbf{V}^2 + \gamma \mathbf{V}^n \quad (2.62)$$

이 때 식(2.62)의 좌변과 우변에 각각 벡터 \mathbf{V}^1 을 곱해주면, 식(2.63)과 같이 나타낼 수 있고, 마찬가지로 방법으로 $\mathbf{V}^2, \mathbf{V}^n$ 을 곱해주면, 각각 식(2.64), (2.65)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha = \theta_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V}^1) + \theta_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V}^1) + \theta_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{V}^1) \quad (2.63)$$

$$\beta = \theta_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V}^2) + \theta_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V}^2) + \theta_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{V}^2) \quad (2.64)$$

$$\gamma = \theta_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V}^n) + \theta_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V}^n) + \theta_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{V}^n) \quad (2.65)$$

이를 행렬 형태로 표현해 주면 식(2.66)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V}^2 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V}^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V}^2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V}^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{V}^2 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{V}^n \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

위 식으로부터 전역 직교 좌표계에서 지역 좌표계로 변환해 주는 행렬은 식(2.67)과 같이 정의 할 수 있으며, 이 때 \mathbf{L} 은 식(2.68)과 같다.
[5]

$$[\tilde{\mathbf{T}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \mathbf{L} & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ sym. & & & & \mathbf{1}_3 & 0 \\ & & & & & \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V}^2 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V}^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V}^2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V}^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{V}^2 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{V}^n \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

만약 변위 벡터와 힘 벡터를 전역 좌표계에서 지역 좌표계로 변환해주면 각각 식(2.69), (2.70)과 같이 나타낼 수 있다. 이 때 위 첨자

e 는 요소에 대해 정의 되었음을 의미한다. [4]

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\}^e = [\tilde{\mathbf{T}}]\{\mathbf{u}\}^e \quad (2.69)$$

$$\{\tilde{\mathbf{f}}\}^e = [\tilde{\mathbf{T}}]\{\mathbf{f}\}^e \quad (2.70)$$

그리고 강성 행렬(stiffness matrix)은 지역 좌표계에서 식(2.71)과 같은 선형 관계식으로 나타낼 수 있다. [4]

$$\{\tilde{\mathbf{f}}\}^e = [\tilde{\mathbf{K}}]^e \{\tilde{\mathbf{u}}\}^e \quad (2.71)$$

여기서 식(2.69)와 (2.70)을 식(2.71)에 대입해주면, 식(2.72)와 같이 나타낼 수 있고, 따라서 강성 행렬을 지역 좌표계에서 전역 좌표계로 변환해주는 관계식은 식(2.73)과 같다. [4]

$$\{\mathbf{f}\}^e = [\tilde{\mathbf{T}}]^T [\tilde{\mathbf{K}}]^e [\tilde{\mathbf{T}}]\{\mathbf{u}\}^e \quad (2.72)$$

$$[\mathbf{K}]^e = [\tilde{\mathbf{T}}]^T [\tilde{\mathbf{K}}]^e [\tilde{\mathbf{T}}] \quad (2.73)$$

하지만 6-자유도의 도입으로 강성 행렬 $\tilde{\mathbf{K}}^e$ 의 경우 여섯 번째 자유도에 해당하는 행과 열이 모두 영(零)이 되고, 이로 인해 특이점(singularity)이 발생하게 된다. 이에 본 논문에서는 이를 방지하기 위해서 여섯 번째 자유도의 대각항(diagonal entries)에 식(2.75)와 같이 대각항 최소값의 10^{-3} 비율을 갖는 값을 대입하였다.

$$[\tilde{\mathbf{K}}]^e = \begin{bmatrix} & & & & & 0 & & & & & 0 \\ & & & & & 0 & & & & & 0 \\ & & & & & 0 & & & & & 0 \\ & & \mathbf{K}_1 & & & 0 & & & \mathbf{K}_2 & & 0 \\ & & & & & 0 & & & & & 0 \\ & & & & & 0 & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & 0 & & & & & 0 \\ & & & & & 0 & & & & & 0 \\ & & & & & 0 & & & & & 0 \\ & & \mathbf{K}_3 & & & 0 & & & \mathbf{K}_4 & & 0 \\ & & & & & 0 & & & & & 0 \\ & & & & & 0 & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$d = \min(\tilde{\mathbf{K}}^e(i,i)) \times 10^{-3} \quad \text{for } i=1, n \quad (2.75)$$

그리고 6-자유도의 도입으로 회전 텐서를 구하는데 필요한 식(2.50)과 (2.51)은 식(2.76), (2.77)과 같은 형태가 된다.

$$\tilde{\theta}_I = [(\alpha_I)^2 + (\beta_I)^2 + (\gamma_I)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.76)$$

$$[\Theta_I] = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_I & \beta_I \\ \gamma_I & 0 & -\alpha_I \\ -\beta_I & \alpha_I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

2.3 Buckling Theory

가느다란 기둥을 축 방향으로 누르거나 얇은 판을 판과 평행한 방향으로 압축하면, 하중이 어느 크기에 도달하는 순간 갑자기 판이 횡 방향으로 과도하게 휘어지는 축 방향 변위(lateral displacement)가 발생한다. 물체의 이러한 거동을 좌굴 혹은 붕괴라고 정의하며 구조물의 안전성에 치명적인 문제점을 야기시킨다.

좌굴이 발생하기 전까지 물체는 정적인 평형상태를 유지하지만, 일단 좌굴이 발생하면 평형상태가 깨어지고 횡 방향으로 큰 변형이 발생하여 외부 하중을 더 이상 지탱할 수 없게 된다. 이러한 좌굴은 비단 가느다란 기둥이나 얇은 판의 휨 좌굴(flexural buckling)에만 국한되는 것이 아니며, 물체의 국부 영역에 지역적으로 발생하는 국부 좌굴(local buckling), 전단력에 의하여 야기되는 전단 좌굴(shear buckling) 그리고 비틀림에 의해 발생하는 비틀림 좌굴(torsion buckling) 등이 있다.

한편 좌굴에 의한 물체의 변형이 구조물이 이루는 평면 내에 있느냐 아니면 바깥에 있느냐에 따라 면내 좌굴(in-plane buckling) 그리고 면외 좌굴(out of plane buckling)로 구분하기도 한다. 좌굴은 거의 대부분 물체의 형상이나 하중 조건의 불완전성(imperfection)에 기인한다. 예를 들어, 기둥의 단면 중심에 정확히 축 방향으로 집중 압축력을 가한다고 했을 때, 이론적으로는 횡 방향으로 휨을 발생시킬 하중이나 모멘트 성분이 전혀 없기 때문에 좌굴이 발생해서는 안 된다.

하지만 실제 기둥은 정확히 원형 단면이 아닐 뿐만 아니라 압축력이 작용하는 지점도 정확히 축의 중심에 위치하지 않는다. 따라서 기하학적인 불완전성과 축 중심에서 어느 정도 편심된 위치에 압축력이 작용함에 따른 불완전함에 따라 횡 방향으로의 변위가 발생하게 된다.

좌굴은 물체의 가느다란 정도를 나타내는 형상 종횡비(aspect ratio)가 클수록 보다 쉽게 발생한다. 다시 말해 길이가 긴 기둥이 짧은 기둥에 비해 좌굴이 보다 쉽게 발생한다. 그리고 좌굴은 동일한 재질, 형상 및 하중조건에서도 물체를 구속하는 경계조건(boundary condition)에 크게 영향을 받는다.

또한 좌굴은 작용하는 힘이 정적 하중이나 동적 하중이냐에 따라 정적

좌굴(static buckling)과 동적 좌굴(dynamic buckling)로 나눌 수 있으며, 이 절에서는 정적 좌굴과 동적 좌굴에 대해 알아보도록 하겠다.

2.3.1 Static Buckling

이처럼 좌굴은 다양한 힘과 형상, 조건 등에서 발생하며 이러한 좌굴 문제를 해석하기 위한 지배방정식은 가상일에 기반을 둔 운동 에너지(total potential energy) 식(2.78)과 위치 에너지(kinetic energy)에 Hamilton's principle을 적용하여 구할 수 있다.

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_g \mathbf{q} \quad (2.78)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.79)$$

식(2.78)과 식(2.79)에 Euler-Lagrange 방정식 식(2.80)을 적용하면, 좌굴 해석을 위한 지배 방정식 식(2.81)을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = 0, \quad \text{where } L = U + V - T \quad (2.80)$$

$$\mathbf{M} \{\ddot{\mathbf{q}}\} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g) \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.81)$$

여기서 \mathbf{M} 은 질량 행렬(mass matrix), \mathbf{K} 는 강성 행렬(stiffness matrix), \mathbf{K}_g 는 기하 강성 행렬(geometric stiffness matrix)를 의미한다. 지배 방정식으로부터 정적 좌굴 해석은 식(2.82)의 형태로 나타난다.

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_g) \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.82)$$

이 식은 고유치 문제(eigenvalue problem)와 유사한 형태를 가지고 있으므로 고유치 해석 솔버를 사용하여 고유치 λ_i 와 고유치

벡터(eigenvector)를 구할 수 있다. 이 때 고유치 해석을 위해서 Block Lanczos 방법을 사용한 “BLZPACK”이라는 오픈 소스(open source)를 활용하였다. 일반적인 고유치 해석의 경우 기하 강성 행렬 \mathbf{K}_g 의 자리에 질량 행렬 \mathbf{M} 을 사용하며, 질량 행렬의 특성 상 집중 행렬(lumped matrix) 또는 일관 행렬(consistent matrix)을 이용하여 고유치를 계산한다. 하지만 정적 좌굴 해석의 경우 기하 강성 행렬 \mathbf{K}_g 는 집중 행렬 형태를 구현하기 어려우므로 일관 행렬 형태로 계산을 수행해야 한다. 따라서 정적 좌굴 해석의 경우 식(2.82)에 대한 고유치 해석을 통해 식(2.83)과 같이 임계 좌굴 압력(critical buckling pressure) 또는 임계 좌굴 하중(critical buckling load)를 계산하게 된다. [6]

$$P_{cr_i} = \lambda_i P \quad \text{or} \quad F_{cr_i} = \lambda_i F \quad (2.83)$$

2.3.2 Dynamic Buckling

동적 좌굴 해석의 경우 정적 좌굴 해석과는 달리 식(2.84)와 같이 시간에 따라 변화하는 하중이 가해진다. 여기서 P_0 는 정적 압축 하중(static compressive loading), P_t 는 축 방향의 동적 하중(dynamic axial loading), θ 는 축 방향의 동적 하중에 대한 가진 주파수(excitation frequency), t 는 시간을 의미한다.

$$P(t) = P_0 + P_t \cos(\theta) \quad (2.84)$$

식(2.84)와 같이 시간에 따라 변화하는 하중이 가해질 때 운동 방정식(equation of motion)은 지배 방정식 식(2.81)로부터 식(2.85)와 같이 구할 수 있다.[6]

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{q}}\} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g^{(s)} + \beta \cos(\theta) \mathbf{K}_g^{(d)})\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.85)$$

여기에서 \mathbf{K} 는 하중이 가해지지 않은 상태에서의 강성 행렬(stiffness matrix)이고, $\mathbf{K}_g^{(s)}$ 는 정적 압축 하중에 대한 기하 강성 행렬(geometric

stiffness matrix)이며, $\mathbf{K}_g^{(d)}$ 는 축 방향의 동적 하중에 대한 기하 강성 행렬이다. \mathbf{M} 은 질량 행렬(mass matrix)이고, β 는 동적 하중의 척도 인자(dynamic load scale factor)를 의미한다. 이 때 주요 동적 불안정 경계 영역(principal region of dynamic instability)을 찾기 위해서 식(2.86)과 같이 주기가 $2T(=2 \times 2\pi/\theta)$ 인 해를 가정하였다. 여기서 \mathbf{a} 와 \mathbf{b} 는 임의의 벡터를 의미한다.[6]

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a} \sin \frac{\theta t}{2} + \mathbf{b} \cos \frac{\theta t}{2} \quad (2.86)$$

식(2.86)을 식(2.85)에 대입하여 푸리에 급수 전개(Fourier series expansion)를 하면 식(2.87)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{a} \sin \frac{\theta t}{2} \left[-\frac{\theta^2}{4} \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_g^{(s)} + \frac{\beta}{2} \mathbf{K}_g^{(d)} \right] \\ & + \mathbf{b} \cos \frac{\theta t}{2} \left[-\frac{\theta^2}{4} \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_g^{(s)} - \frac{\beta}{2} \mathbf{K}_g^{(d)} \right] + \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{high order term}} = 0 \end{aligned} \quad (2.87)$$

식(2.87)에서 고차항을 무시하면 식(2.88)과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{a} \sin \frac{\theta t}{2} \left[-\frac{\theta^2}{4} \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_g^{(s)} + \frac{\beta}{2} \mathbf{K}_g^{(d)} \right] + \mathbf{b} \cos \frac{\theta t}{2} \left[-\frac{\theta^2}{4} \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_g^{(s)} - \frac{\beta}{2} \mathbf{K}_g^{(d)} \right] \approx 0 \quad (2.88)$$

모든 시간에 대해 식(2.88)를 만족하는 자명하지 않은 해(non-trivial solution)를 얻기 위해서는 식(2.89)와 같은 고유치 문제(eigenvalue problem) 형태를 갖는다.[6]

$$\left| \mathbf{K} + \left(\mathbf{K}_g^{(s)} \pm \frac{\beta}{2} \mathbf{K}_g^{(d)} \right) - \frac{\theta^2}{4} \mathbf{M} \right| = 0 \quad (2.89)$$

동적 좌굴 해석의 경우 정적 좌굴 해석 문제와는 달리 질량 행렬을 사용하며, 본 논문에서는 집중 질량 행렬(lumped mass matrix)을 사용하여 고유치를 구했으며, 이 때 고유치 $\lambda_i = \theta_i^2 / 4$ 이 된다. 그리고 이로부터 구조물이 불안정해지는 가진 주파수(excitation frequency) θ_i 를 구할 수 있으며, 동적 하중 변화에 따른 불안정 경계 영역(instability region)을 구할 수 있다.

2.3.3 Dynamic Buckling Theory of Beam

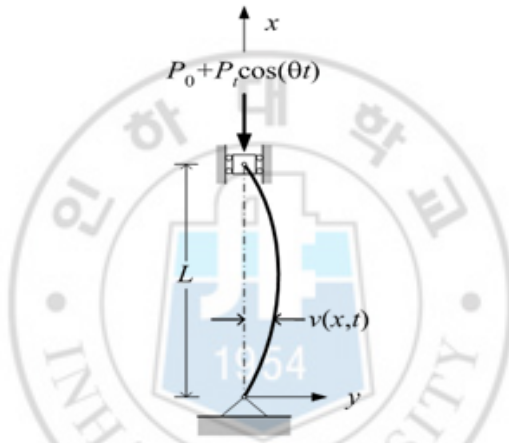


Fig. 6 Dynamic Buckling Model of Beam

Fig. 6과 같이 보(beam) 구조물에 축 방향으로 정적 압축 하중(compressive static load)과 동적 압축 하중(compressive dynamic load)이 동시에 가해질 경우 보의 동적 좌굴 현상을 이론적으로 전개할 수 있다.

우선 보의 정적 휨(static bending)에 관한 식은 식(2.90)과 같다. [7]

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = 0 \quad (2.90)$$

식(2.90)을 두 번 미분하면 식(2.91)과 같이 쓸 수 있다.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (2.91)$$

이 때 E 는 탄성 계수(Young's Modulus)이고, I 는 면적 관성 모멘트(area moment of inertia)이며, P 는 축 방향의 힘을 의미한다. 그리고 Fig. 6과 같이 정적 압축 하중과 동적 압축 하중이 동시에 가해지는 경우 힘 P 는 식(2.92)와 같이 나타낼 수 있다.

$$P(t) = P_0 + P_t \cos(\theta t) \quad (2.92)$$

여기서 P_0 는 보에 가해지는 정적 압축 하중이고, P_t 는 축 방향의 동적 하중에 대한 진폭(amplitude)를 의미하며, θ 는 축 방향의 동적 하중에 대한 가진 주파수(excitation frequency)를 의미한다. 이 때 동적 하중의 주기 T 는 $2\pi/\theta$ 이다.

횡 방향 관성력만을 고려하여 운동 방정식을 구성하면, 식(2.91)은 식(2.93)과 같이 표현할 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + (P_0 + P_t \cos(\theta t)) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.93)$$

식(2.93)에서 $v(x,t)$ 는 시간에 따른 처짐을 의미하며, ρ 는 단위 길이당 밀도를 의미한다. 위의 식(2.93)이 식(2.94)와 같은 형태의 해를 갖는다면 변수 분리(separation of variable)를 통해 식(2.93)은 식(2.95)와 같이 표현할 수 있다. 이 때 식(2.94)는 경계 조건(boundary condition)을 만족한다.

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{L} \quad (2.94)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[EI \frac{k^4 \pi^4}{L^4} f_k(t) - (P_0 + P_t \cos(\theta t)) \frac{k^2 \pi^2}{L^2} f_k(t) + \rho \frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} \right] \sin \frac{k\pi x}{L} = 0 \quad (2.95)$$

식(2.95)를 만족하기 위해서는 모든 k 에 대해 \sin 함수의 계수가 영(零)이 되어야 하며, 따라서 모든 k 에 대해 식(2.96)이 만족해야 한다.

$$EI \frac{k^4 \pi^4}{L^4} f_k(t) - (P_0 + P_t \cos(\theta t)) \frac{k^2 \pi^2}{L^2} f_k(t) + \rho \frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} = 0 \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (2.96)$$

그리고 이를 자유진동 상태에서의 고유 주파수(natural frequency) ω_k 와 오일러 보(Euler beam)의 임계 좌굴 하중(critical buckling load) P_k^{cr} 을 각각 식(2.98), (2.99)와 같이 정의하고 이를 사용하여 식(2.96)를 다시 쓰면 식(2.97)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + \omega_k^2 \left(1 - \frac{P_0 + P_t \cos(\theta t)}{P_k^{cr}} \right) f_k(t) = 0 \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (2.97)$$

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (2.98)$$

$$P_k^{cr} = \frac{k^2 \pi^2}{L^2} EI \quad (2.99)$$

또한 일정한 압축 하중 P_0 가 가해지는 보의 고유 주파수 Ω_k 와 가진 매개변수(excitation parameter) μ_k 를 식(2.101), (2.102)와 같이 정의하고, 이를 식(2.97)에 적용하면 식(2.100)과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos(\theta t)) f_k(t) = 0 \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (2.100)$$

$$\Omega_k^2 \equiv \omega_k^2 \frac{(P_k^{cr} - P_0)}{P_k^{cr}} \quad (2.101)$$

$$\mu_k \equiv \frac{P_t}{2(P_k^{cr} - P_0)} \quad (2.102)$$

그리고 여기서 $k=1$ 일 때의 기본모드(fundamental mode)만 고려하면 식(2.100)은 식(2.103)과 같이 나타낼 수 있고, 마찬가지로 식(2.101)과 식(2.102)도 식(2.104)와 식(2.105)로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos(\theta t)) f(t) = 0 \quad (2.103)$$

$$\Omega^2 = \left(\frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \right)^2 \left[1 - P_0 \frac{L^2}{\pi^2 EI} \right] \quad (2.104)$$

$$\mu = \frac{P_t}{2 \left[(\pi^2 EI) / L^2 - P_0 \right]} \quad (2.105)$$

이 때 식(2.103)은 식(2.106)과 같은 Mathieu-Hill 방정식의 형태를 갖게 된다. [8]

$$f'' + \Omega^2 [1 - 2\mu \Phi(t)] f = 0 \quad (2.106)$$

여기서 $\Phi(t)$ 는 가진 주기가 $T = 2\pi/\theta$ 인 임의의 주기 함수이고, 다음과 같이 매개변수의 변화에 따라 해가 안정하거나 불안정해질 수 있다.

⇒ 해의 주기가 T (또는 $2T$)에서 주기 $2T$ (또는 T)로 바뀔 경우 : 안정

⇒ 해의 주기가 T (또는 $2T$)에서 주기 T (또는 $2T$)로 바뀔 경우 : 불안정

즉 주기 $2T$, T 인 해가 존재하므로 이를 푸리에 급수(Fourier series)로 가정하고, 이를 통해 매개변수에 따른 해의 안정성을 판별할 수 있다.

불안정 영역(instability region)을 구하기 위해 주기가 $2T (= 2 \times 2\pi/\theta)$ 인 해를 식(2.107)과 같이 정의하면 다음과 같다.

$$f(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) \quad (2.107)$$

이 중에서 $k=1$ 인 경우만 고려하면, 식(2.108)과 같다.

$$f(t) = a \sin \frac{\theta t}{2} + b \cos \frac{\theta t}{2} \quad (2.108)$$

이를 식(2.103)에 대입하면 식(2.109)와 같으며, 이 때 주기 $2T$ 에 대해 푸리에 급수 전개를 하면 식(2.110)과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\frac{\theta^2}{4} a \sin \frac{\theta t}{2} - \frac{\theta^2}{4} b \cos \frac{\theta t}{2} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos(\theta t)) a \sin \frac{\theta t}{2} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos(\theta t)) b \cos \frac{\theta t}{2} = 0 \quad (2.109)$$

$$a \sin \frac{\theta t}{2} \left(-\frac{\theta^2}{4} + \Omega^2 + \mu \Omega^2 \right) + b \cos \frac{\theta t}{2} \left(-\frac{\theta^2}{4} + \Omega^2 - \mu \Omega^2 \right) + \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{high order term}} = 0 \quad (2.110)$$

그리고 식(2.110)에서 주기가 $2T$ 인 항을 취하고 나머지 고차항을 무시하면, 식(2.111)과 같이 나타낼 수 있고, 이 때 모든 시간에 대해 식(2.111)을 만족하는 자명하지 않은 해(non-trivial solution)을 얻기 위해서는 식(2.112)를 만족해야 한다.

$$a \sin \frac{\theta t}{2} \left(-\frac{\theta^2}{4} + \Omega^2 + \mu \Omega^2 \right) + b \cos \frac{\theta t}{2} \left(-\frac{\theta^2}{4} + \Omega^2 - \mu \Omega^2 \right) \approx 0 \quad (2.111)$$

$$\Omega^2 \left[1 \pm \mu - \frac{1}{4} \left(\frac{\theta}{\Omega} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.112)$$

이는 불안정 영역을 결정짓는 매개변수와 가진 진동수의 근사화된 식으로 식(2.113)과 같이 무차원 가진 진동수 $\theta/(2\Omega)$ 를 매개변수 μ 에 대한 양함수의 형태로 표현할 수 있으며, 이를 도식하여 가진 매개 변수 μ 에 따른 불안정 영역의 변화를 살펴 볼 수 있다.

$$\frac{\theta}{2\Omega} = \sqrt{1 \pm \mu} \quad (2.113)$$

3. Numerical Example

본 연구에서 개발한 동적 좌굴 유한요소해석 프로그램을 이용하여 동적 좌굴 해석을 하기 위한 기본적인 해석을 수행하였다. 기본적으로 선형 정적 해석, 비선형 정적 해석 그리고 정적 좌굴 해석을 수행하였으며, 최종적으로 본 연구의 목적인 동적 좌굴 해석을 수행하여 이론값 또는 실험값과의 비교를 통해 동적 좌굴 유한요소해석 프로그램의 타당성과 신뢰성을 검증하였다.

3.1 Linear Static Analysis

3.1.1 Patch Test

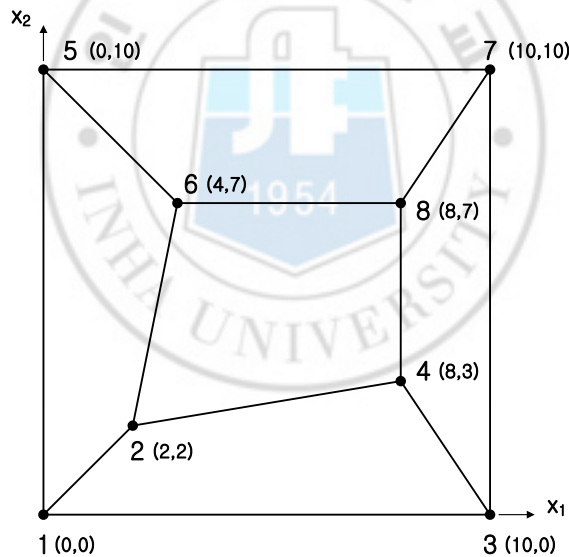


Fig. 7 Patch Test Mesh

패치 테스트 모델(patch test model)은 Fig. 1과 같다. 이 모델에 대해서 constant curvature, constant shear, constant twist 패치 테스트를 수행하였으며, 재료의 탄성계수(Young's modulus)는 $2.1E+06$ 이고, 푸아송의 비(Poisson's ratio)는 0.3이다. 그리고 모델의 두께는 1.0과 0.001 두 모델에 대해 패치 테스트를 수행하였다.

3.1.1.1 Constant Curvature Patch Test

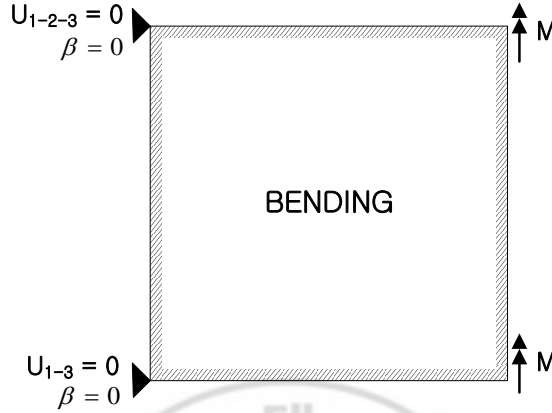


Fig. 8 Constant Curvature Patch Test Model

Constant curvature 패치 테스트 모델에 대한 경계조건은 우선 1번 절점에 대해 1,3 방향의 변위와 2 방향의 회전을 구속하였고, 5번 절점에 대해 1,2,3 방향의 변위와 2 방향의 회전을 구속하였다. 또한 외력은 3번, 7번 절점에 2 방향의 모멘트를 가하였으며, 이 때 힘의 크기는 두께 1.0일 때 $M=1000$, 두께 0.001일 때 $M=0.0001$ 을 가하였다. 이러한 경계 조건과 외력은 Fig. 8로부터 확인할 수 있으며, constant curvature 패치 테스트 해석 결과 각 절점의 곡률(ρ)는 식(3.1)과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.1)$$

두께	NODE	x-coord.	β	ρ
1.0	2	2.0	0.0011429	1750
	3	10.0	0.0057143	1750
	4	8.0	0.0045714	1750
	6	4.0	0.0022857	1750
	7	10.0	0.0057143	1750
	8	8.0	0.0045714	1750
0.001	2	2.0	0.114286	17.50
	3	10.0	0.571429	17.50
	4	8.0	0.457143	17.50
	6	4.0	0.228571	17.50
	7	10.0	0.571429	17.50
	8	8.0	0.457143	17.50

Table. 1 Constant Curvature Patch Test Results

Table. 1은 constant curvature 패치 테스트 결과로 두 가지 두께에 대해 구속조건이 적용된 절점을 제외한 나머지 절점에서 모두 일정한 곡률이 나오는 것을 볼 수 있다.

3.1.1.2 Constant Shear Patch Test

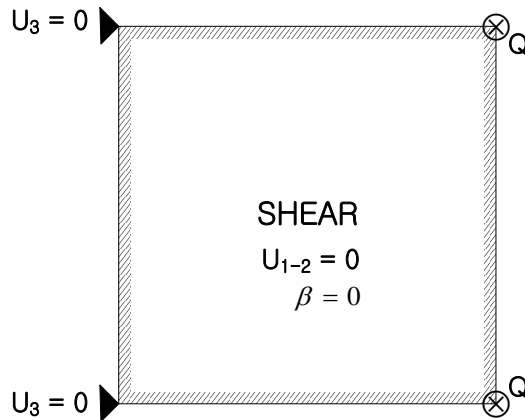


Fig. 9 Constant Shear Patch Test Model

Constant shear 패치 테스트 모델에 대한 경계조건은 우선 1번과 5번 절점에 대해 3 방향의 변위를 구속하였고, 모든 절점에 대해 1,2 방향의 변위와 2 방향의 회전을 구속하였다. 또한 외력은 3번, 7번 절점에 3 방향의 집중 하중을 가하였으며, 이 때 힘의 크기는 두께 1.0일 때 $Q=2000$, 두께 0.001일 때 $Q=2.0$ 을 가하였다. 이러한 경계 조건과 외력은 Fig. 9로부터 확인할 수 있으며, constant shear 패치 테스트 해석 결과는 Table. 2와 같다.

두께	NODE	x-coord.	z-disp. (w)	dw/dx
1.0	2	2.0	0.000495238	2.47619E-04
	3	10.0	0.00247619	2.47619E-04
	4	8.0	0.00198095	2.47619E-04
	6	4.0	0.000990476	2.47619E-04
	7	10.0	0.00247619	2.47619E-04
	8	8.0	0.00198095	2.47619E-04
0.001	2	2.0	0.000495238	2.47619E-04
	3	10.0	0.00247619	2.47619E-04
	4	8.0	0.00198095	2.47619E-04
	6	4.0	0.000990476	2.47619E-04
	7	10.0	0.00247619	2.47619E-04
	8	8.0	0.00198095	2.47619E-04

Table. 2 Constant Shear Patch Test Results

Constant shear 패치 테스트 결과로 두 가지 두께에 대해 구속조건이 적용된 절점을 제외한 나머지 절점에서 모두 일정한 기울기가 나타나는 것을 확인할 수 있으며, 실제로 3 방향 변위는 식(3.2)를 사용하여 계산할 수 있다.

$$\tau = \frac{V}{A} = G\gamma, \quad \gamma = \frac{w}{L}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{2(1+\nu)VL}{EA} \quad (3.2)$$

3.1.1.3 Constant Twist Patch Test

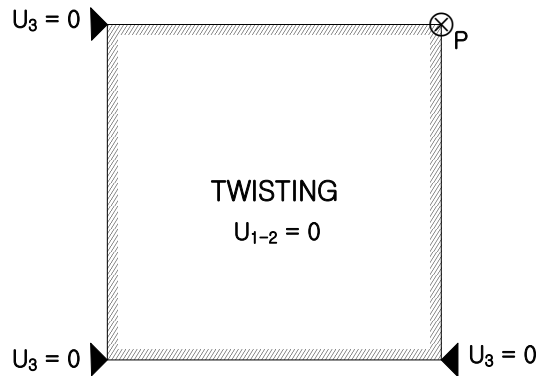


Fig. 10 Constant Twist Patch Test Model

Constant twist 패치 테스트 모델에 대한 경계조건은 우선 1, 3, 5번 절점에 대해 3 방향의 변위를 구속하였고, 모든 절점에 대해 1,2 방향의 변위를 구속하였다. 또한 외력은 7번 절점에 3 방향의 집중 하중을 가하였으며, 이 때 힘의 크기는 두께 1.0일 때 $P=1000$, 두께 0.001일 때 $P=1.0E-06$ 을 가하였다. 이러한 경계 조건과 외력은 Fig. 10으로부터 확인할 수 있으며, constant twist 패치 테스트 해석 결과는 Table. 3과 같다.

두께	NODE	x-coord.	α	ρ_1	y-coord.	β	ρ_2
1.0	2	2.0	0.00751761	266.04	2.0	0.0075345	265.45
	4	8.0	0.03103950	257.74	3.0	0.0114079	262.98
	6	4.0	0.01518240	263.46	7.0	0.0272324	257.05
	7	10.0	0.03767130	265.45	10.0	0.0379748	263.33
	8	8.0	0.03104290	257.71	7.0	0.0272190	257.17
0.001	2	2.0	0.00742857	269.23	2.0	0.00742857	269.23
	4	8.0	0.02971430	269.23	3.0	0.0111429	269.23
	6	4.0	0.01485710	269.23	7.0	0.0260000	269.23
	7	10.0	0.03714290	269.23	10.0	0.0371429	269.23
	8	8.0	0.02971430	269.23	7.0	0.0260000	269.23

Table. 3 Constant Twist Patch Test Results

Constant twisting 테스트 결과를 보면 두께가 0.001일 때 x와 y방향에 대해 일정한 곡률이 나오는 것을 볼 수 있지만 두께가 1.0일 때는 그렇지 않음을 알 수 있다. 이 문제는 두께가 두꺼울 때 횡 전단 변형(transverse shear deformation)이 지배적으로 나타나기 때문에 발생하는 것으로 전단 보정 계수(shear correction factor)를 사용하여 전단 변형(shear deformation)을 억제하거나 사각형 요소를 사용함으로써 이 문제를 해결할 수 있다.[1]

3.1.2 Pinched Cylinder

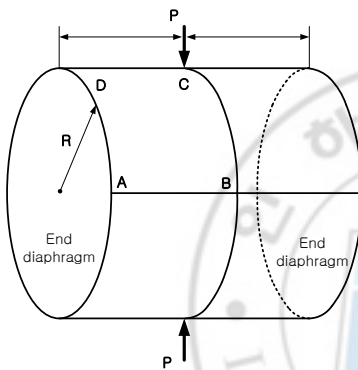


Fig. 11 Pinched Cylinder Model

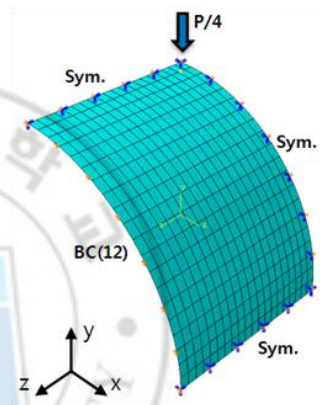


Fig. 12 Pinched Cylinder 1/8 Model

Fig. 11과 같이 양 끝에 막이 있는 pinched cylinder 쉘은 이론적인 해를 비교할 수 있기 때문에 쉘 검증 문제에 적합하다. 이 때 하중은 중간면에서 서로 반대 방향으로 집중 하중 P가 가해지고 있으며, 형상 및 하중이 대칭이기 때문에 Fig. 12와 같이 1/8 모델을 사용하였다.

Pinched cylinder 쉘의 형상은 길이(L) 600, 반경(R) 300, 두께(t) 3이고, 재료 특성은 탄성 계수(Young's modulus) $3.0E+06$, 푸아송 비(Poisson's ratio) 0.3이며, 외력 P의 크기는 1이다. 격자(mesh)는 20x20, 30x30, 40x40 격자를 사용하였으며, 경계 조건은 절단면은 각각 대칭 경계 조건을 적용하였으며, pinched cylinder 쉘의 end diaphragm 부분은 X와 Y 방향의 변위를 구속하였다.

해석 결과 Table. 4로부터 ABAQUS와 현재 쉘 모두 이론적인 해와 유사하게 나옴을 확인할 수 있으며, ABAQUS결과가 보다 이론적인 해에

가까움을 확인할 수 있다. 이는 쉘 요소가 다르기 때문에 발생하는 차이로 ABAQUS 쉘 요소가 현재 쉘 요소에 비해 보다 유연함을 알 수 있다. 그리고 Fig. 13으로부터 요소의 수가 증가함에 따라 ABAQUS와 현재 쉘의 결과가 모두 이론적인 해에 수렴함을 알 수 있다. 또한 Fig. 14는 Y방향의 변위에 대해 해석 결과를 도시한 그림으로 변형 형상이 유사하게 나옴을 확인할 수 있다.

Mesh	Exact	Present	$W_{\text{present}} / W_{\text{exact}}$	ABAQUS	$W_{\text{abaqus}} / W_{\text{exact}}$
20x20	1.8248E-05	1.74362E-05	0.9555	1.77866E-05	0.9747
30x30		1.79593E-05	0.9842	1.81676E-05	0.9956
40x40		1.81878E-05	0.9967	1.82150E-05	0.9982

Table. 4 Comparison of Linear Static Analysis for Pinched Cylinder with Exact Solution

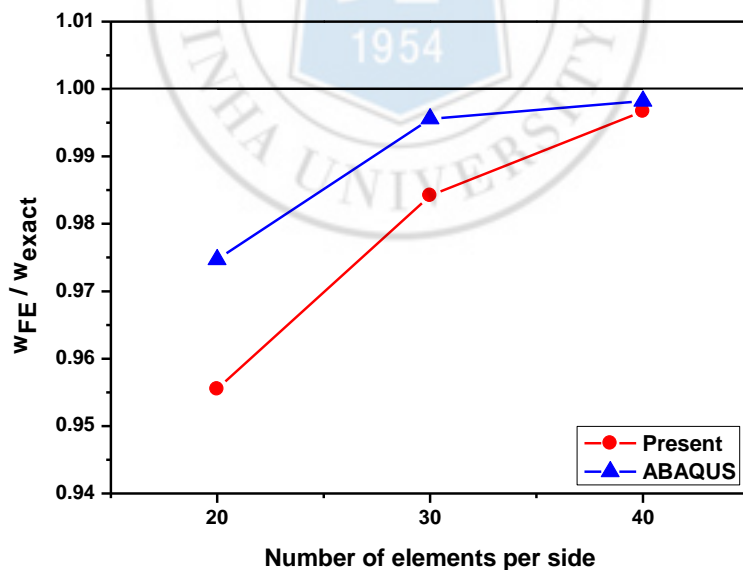


Fig. 13 Comparison of Convergence for Pinched Cylinder with ABAQUS

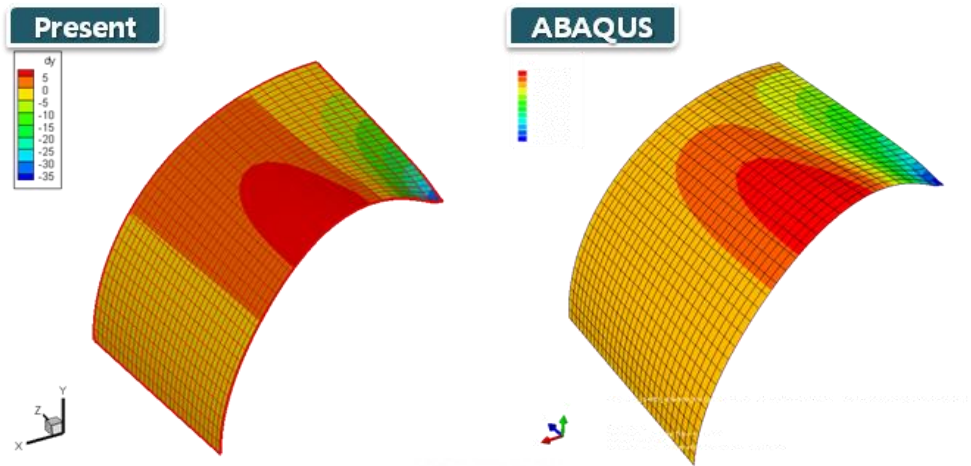


Fig. 14 Comparison of Linear Static Analysis for Pinched Cylinder with ABAQUS

3.1.3 Hemispherical Shell

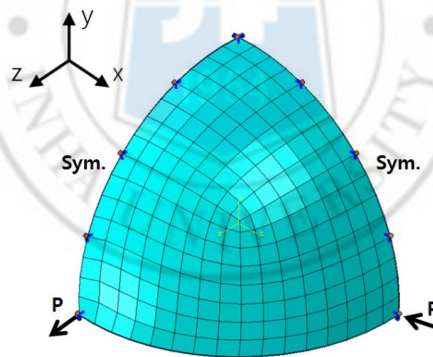


Fig. 15 Hemispherical Shell Model

Fig. 15와 같은 반구형(hemispherical) 셸의 1/4 모델을 사용하여 이론적인 해와 ABAQUS 결과값에 대해 비교해 보았다. 먼저 반경은 10m, 두께는 0.04m이고, 요소는 한 면당 9개, 17개 격자(mesh)를 사용하였다. 탄성계수는 68.25MPa이고, 푸아송 비는 0.3의 물성치를 주었다. 경계조건은 좌우 면에 대해 대칭 경계조건을 적용하였고, 하중은 Fig. 15와 같은 지점에 (+)Z, (-)X방향으로 각각 1씩 가하였다. 해석 결과 Table.

5로부터 ABAQUS는 이론값보다 큰 값이 나오고, 현재 코드 결과는 이론값보다 작은 값이 나옴을 알 수 있는데 이는 사용한 쉘 요소가 다르므로 요소의 특성에 따른 차이로 볼 수 있다. 하지만 Fig. 16로부터 두 결과값 모두 요소 수가 증가함에 따라 이론값에 수렴함을 확인할 수 있으며, Fig. 17은 Y방향 변위에 대해 ABAQUS와 현재 코드의 해석 결과를 직접 도시한 그림으로 서로 유사한 결과가 나옴을 알 수 있다.

Node/side	Exact	Present	$\frac{W_{\text{present}}}{W_{\text{exact}}}$	ABAQUS	$\frac{W_{\text{abaqus}}}{W_{\text{exact}}}$
9	0.0924	0.0888439	0.9615	0.0941153	1.0186
17		0.0919091	0.9947	0.0933083	1.0098
25		0.0921386	0.9972	0.0928799	1.0052

Table. 5 Comparison of Linear Static Analysis for Hemispherical Shell with Exact Solution

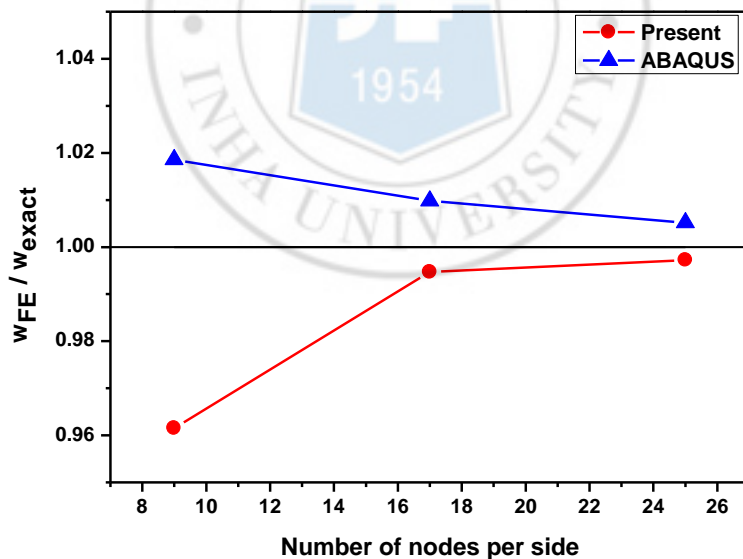


Fig. 16 Comparison of Convergence for Hemispherical Shell with ABAQUS

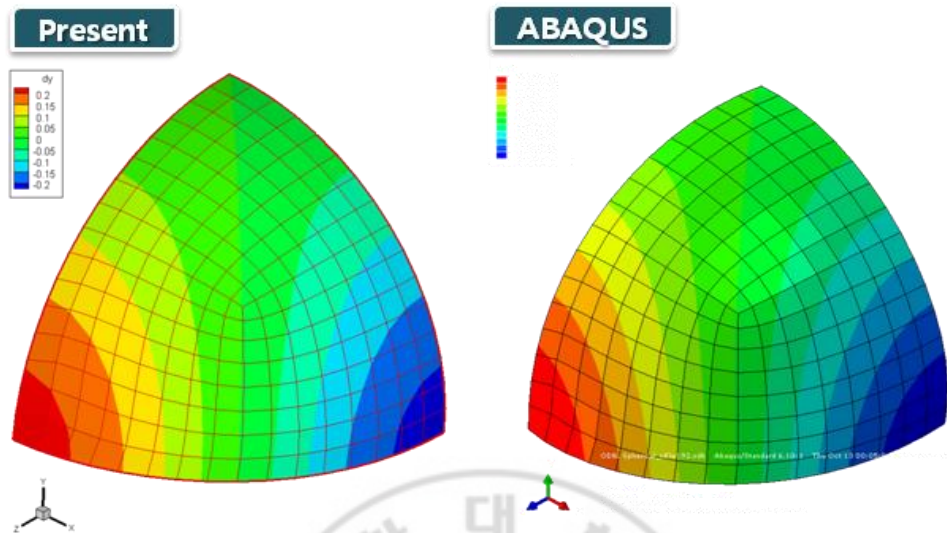


Fig. 17 Comparison of Linear Static Analysis for Hemispherical Shell with ABAQUS

3.2 Geometric Nonlinear Analysis

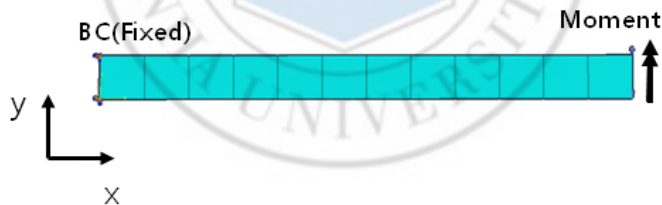


Fig. 18 Beam Model for Geometric Nonlinear Analysis

Fig. 18과 같은 보(beam) 형상에 대해 기하비선형 정적 해석(geometric nonlinear static analysis)을 수행하여 ABAQUS와 그 결과를 비교해 보았다. 먼저 가로 12m, 세로 1m, 두께 0.01m 이고, 요소는 총 12개를 사용하였다. 탄성계수는 1.0MPa이고, 푸아송 비는 0.0의 물성치를 주었다. 경계조건은 한 면은 XYZ방향의 변위와 회전을 모두 구속하였고, 다른 한 면은 Y방향으로 모멘트를 가하였다. 그리고 물체가 Y방향에 대해 회전할 때 X방향의 회전으로 인한 형상의 뒤틀림을 방지하기 위해 모든 절점에

대해 X방향 회전을 구속하였다. 해석 결과 Fig. 19로부터 ABAQUS 해석 결과와 유사한 결과가 나옴을 확인 할 수 있으며, 이 때 힘의 증가에 따른 형상 변화는 Fig. 20과 같다.

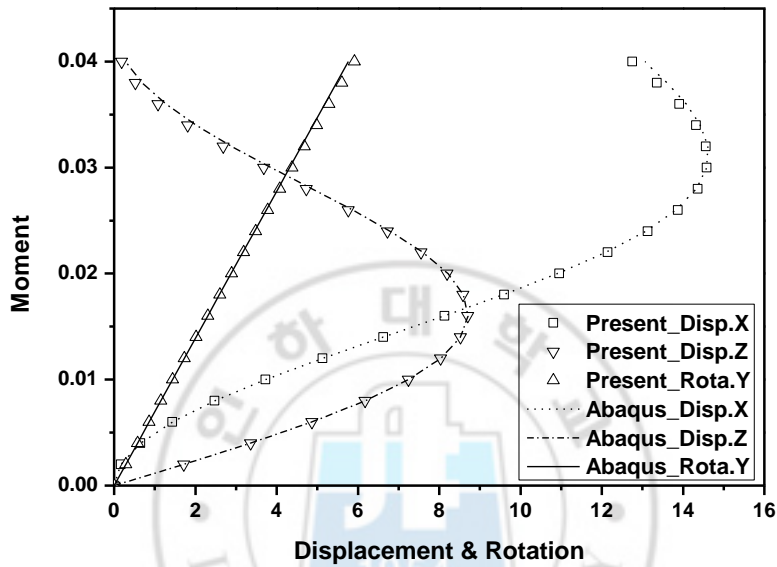


Fig. 19 Comparison of Geometric Nonlinear Analysis for Beam with ABAQUS

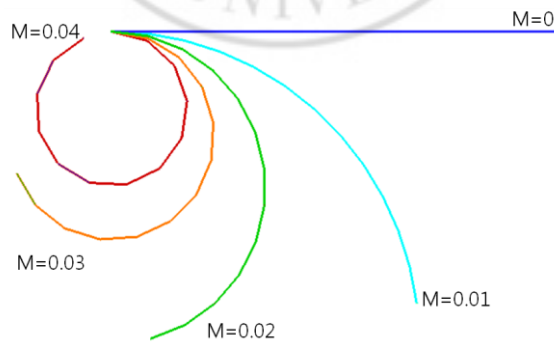


Fig. 20 Geometry Change of Beam According to Loads Increase

3.3 Static Buckling Analysis

3.3.1 Rectangular Plate Shell

정적 좌굴 해석 프로그램의 검증을 위해 먼저 Fig. 21과 같은 직사각형 평판 쉘(rectangular plate shell) 형상에 대해 정적 좌굴 해석을 수행하였다. 크기는 가로 20m, 세로 8m이고, 두께는 0.01m로 4노드 쉘 40x16 격자로 모델링 하였으며, 재료의 물성치는 탄성계수 29MPa, 푸아송 비는 0.3을 적용하였다. 경계 조건은 한 면은 XYZ방향의 변위를 구속하였고, 반대쪽 면은 YZ방향의 변위를 구속하였다. 그리고 나머지 두 면은 Z방향의 변위를 구속하였다. 마지막으로 하중은 YZ방향의 변위를 구속한 면에 X방향으로 총 8N의 압축력을 가하였다.

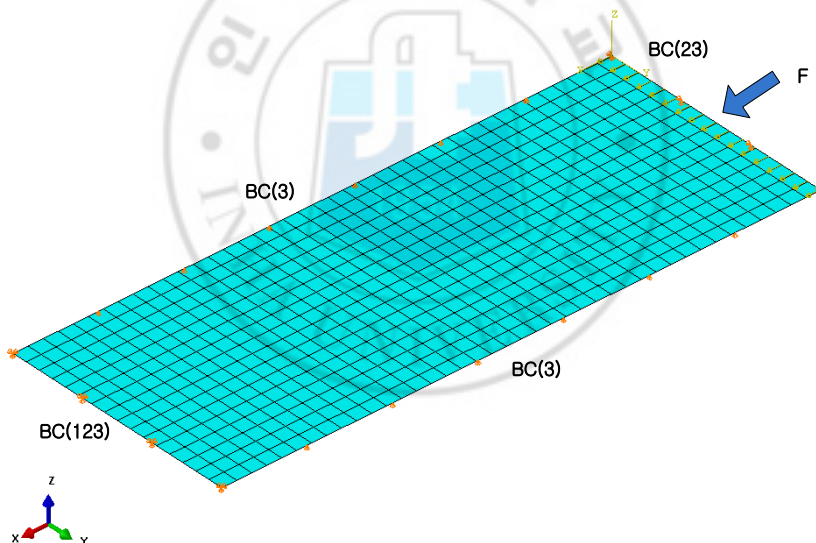


Fig. 21 Rectangular Plate Shell Model

해석 결과 나오는 고유치(eigenvalue) λ_i 는 Table. 6과 같고, ABAQUS와 유사한 결과가 나옴을 확인할 수 있다. 또한 고유치 벡터(eigenvector)로부터 확인할 수 있는 좌굴 형상 역시 ABAQUS와 유사함을 확인할 수 있다.(Table. 7)

MODE	Present	ABAQUS
1	1.67189	1.6736
2	1.69982	1.7033
3	2.01893	2.0198
4	2.57052	2.5706
5	3.30094	3.3003
6	3.46471	3.4751
7	4.2056	4.2041
8	5.29042	5.2879
9	6.47877	6.5154
10	6.56839	6.5648

Table. 6 Comparison of Eigenvalue for Rectangular Plate Shell with ABAQUS

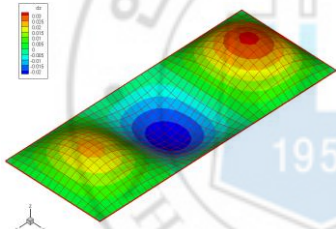
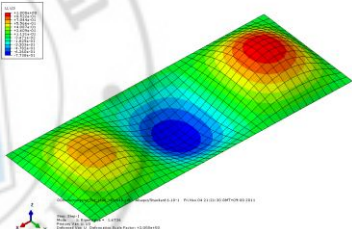
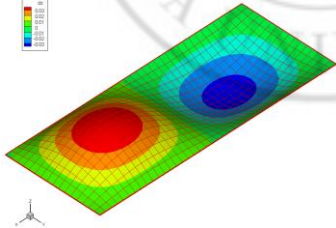
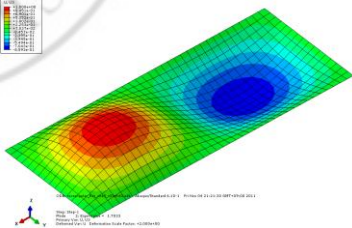
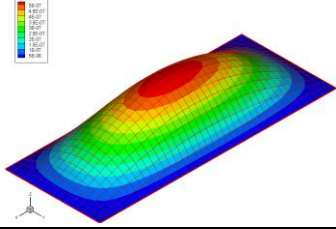
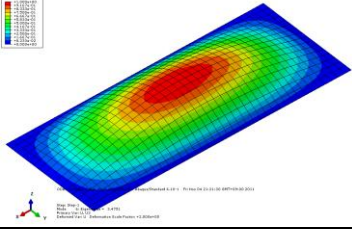
MODE	Present	ABAQUS
1		
2		
6		

Table. 7 Comparison of Mode Shape for Rectangular Plate Shell with ABAQUS

3.3.2 Cylindrical Shell

정적 좌굴 해석 프로그램의 검증을 위해 Fig. 22과 같은 원통형 쉘(cylindrical shell) 형상에 대해 정적 좌굴 해석을 수행하였다. 크기는 직경 0.3m, 길이 2m이고, 두께는 0.005m로 4노드 쉘 40x80 격자로 모델링 하였으며, 재료의 물성치는 탄성계수 71GPa, 푸아송 비는 0.3을 적용하였다. 경계 조건은 한 면은 XYZ방향의 변위를 구속하였고, 반대쪽 면은 XY방향의 변위를 구속하였으며, 하중은 YZ방향의 변위를 구속한 면에 X방향으로 총 40000N의 압축력을 가하였다.

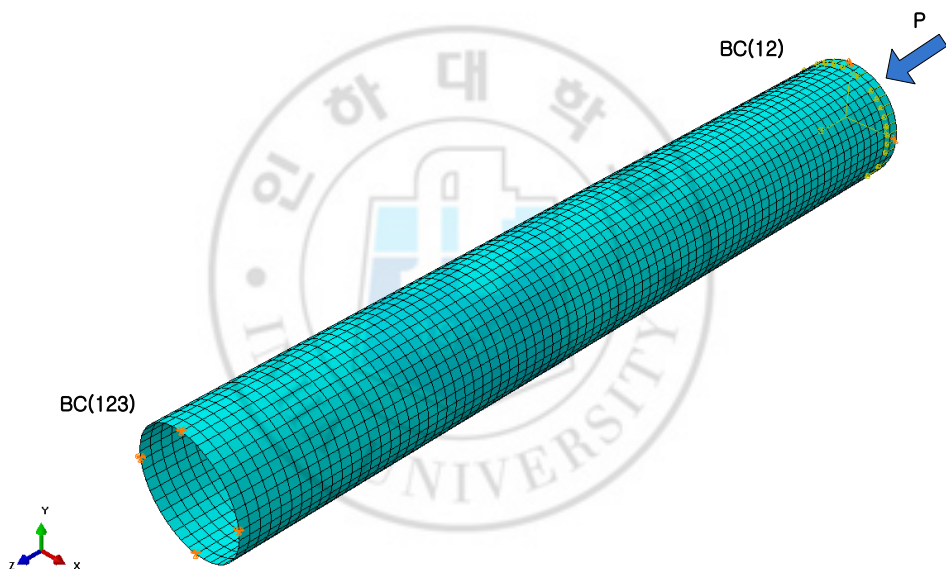


Fig. 22 Cylindrical Shell Model

해석 결과 고유치는 Table. 8과 같으며, ABAQUS 해석 결과와 유사하게 나옴을 확인할 수 있다. 또한 고유치 벡터(eigenvector)로부터 확인할 수 있는 좌굴 형상 역시 ABAQUS와 유사함을 확인할 수 있다.(Table. 10)

이 때 정적 좌굴 해석으로부터 나온 고유치를 식(2.83)에 대입하면, Table. 9와 같은 임계 좌굴 압력(critical buckling pressure)을 구할 수 있으며, 이론값[6]과 비교했을 때 유사한 결과가 나옴을 알 수 있고 더불어 ABAQUS 해석 결과보다 오차가 적음을 알 수 있다.

MODE	Present	ABAQUS
1	1204.05	1242.9
3	1418.57	1442.7
5	1502.83	1534.4
7	1564.76	1626.3
9	1616.48	1641.0

Table. 8 Comparison of Eigenvalue for Cylindrical Shell with ABAQUS

MODE	$P_{cr} * 10^9 [N/m^2]$ (Present)	$P_{cr} * 10^9 [N/m^2]$ (Analytical)	$P_{cr} * 10^9 [N/m^2]$ (ABAQUS)
1	1.0220	0.9926	1.0550
3	1.2041	1.1641	1.2246
5	1.2756	1.1722	1.3024
7	1.3282	1.2602	1.3804
9	1.3721	1.2993	1.3929

Table. 9 Comparison of Critical Buckling Pressure for Cylindrical Shell with Analytic Solution

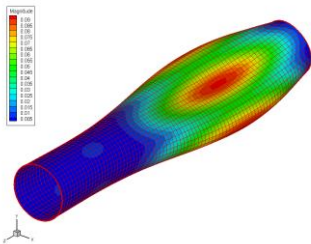
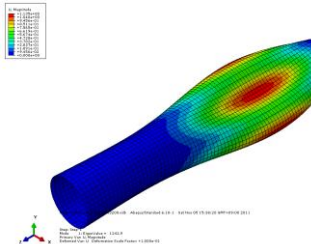
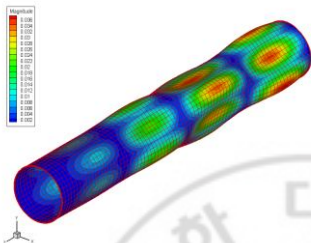
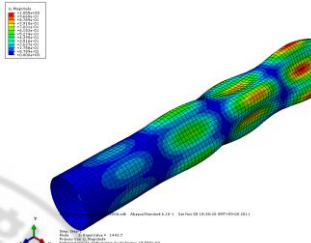
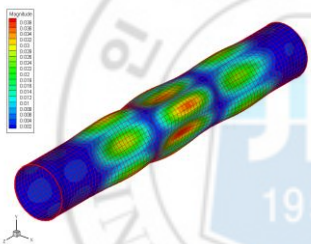
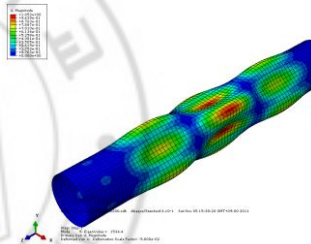
MODE	Present	ABAQUS
1	 <p>Figure showing the Mode 1 shape for the cylindrical shell using the Present method. The plot displays a color-coded displacement field on a cylindrical shell, with a vertical color bar on the left indicating the magnitude of the displacement. The shape shows a single, elongated, oval-like deformation along the length of the shell.</p>	 <p>Figure showing the Mode 1 shape for the cylindrical shell using ABAQUS. The plot displays a color-coded displacement field on a cylindrical shell, with a vertical color bar on the left indicating the magnitude of the displacement. The shape shows a single, elongated, oval-like deformation along the length of the shell, matching the Present method.</p>
3	 <p>Figure showing the Mode 3 shape for the cylindrical shell using the Present method. The plot displays a color-coded displacement field on a cylindrical shell, with a vertical color bar on the left indicating the magnitude of the displacement. The shape shows three distinct, elongated, oval-like deformations along the length of the shell.</p>	 <p>Figure showing the Mode 3 shape for the cylindrical shell using ABAQUS. The plot displays a color-coded displacement field on a cylindrical shell, with a vertical color bar on the left indicating the magnitude of the displacement. The shape shows three distinct, elongated, oval-like deformations along the length of the shell, matching the Present method.</p>
5	 <p>Figure showing the Mode 5 shape for the cylindrical shell using the Present method. The plot displays a color-coded displacement field on a cylindrical shell, with a vertical color bar on the left indicating the magnitude of the displacement. The shape shows five distinct, elongated, oval-like deformations along the length of the shell.</p>	 <p>Figure showing the Mode 5 shape for the cylindrical shell using ABAQUS. The plot displays a color-coded displacement field on a cylindrical shell, with a vertical color bar on the left indicating the magnitude of the displacement. The shape shows five distinct, elongated, oval-like deformations along the length of the shell, matching the Present method.</p>

Table. 10 Comparison of Mode Shape for Cylindrical Shell with ABAQUS

3.3.3 Stiffened Square Plate Shell

정적 좌굴 해석 프로그램의 검증을 위해 Fig. 23과 같은 보강된 정사각형 평판 쉘(stiffened square plate shell) 형상에 대해 정적 좌굴 해석을 수행하였다. 평판은 가로 10m, 세로 10m, 두께 0.01m이고, 보강재(stiffener)는 가로 10m, 세로 1m, 두께 0.01m이며, 4노드 쉘 4000개 요소로 모델링 하였다. 재료의 물성치는 탄성계수 71GPa, 푸아송 비 0.3을 적용하였다. 경계 조건은 한 면은 XYZ방향의 변위를 구속하였고, 반대쪽 면은 XZ방향의 변위를 구속하였으며, 하중은 XZ방향의 변위를 구속한 면에 Y방향으로 총 80N의 압축력을 가하였다.

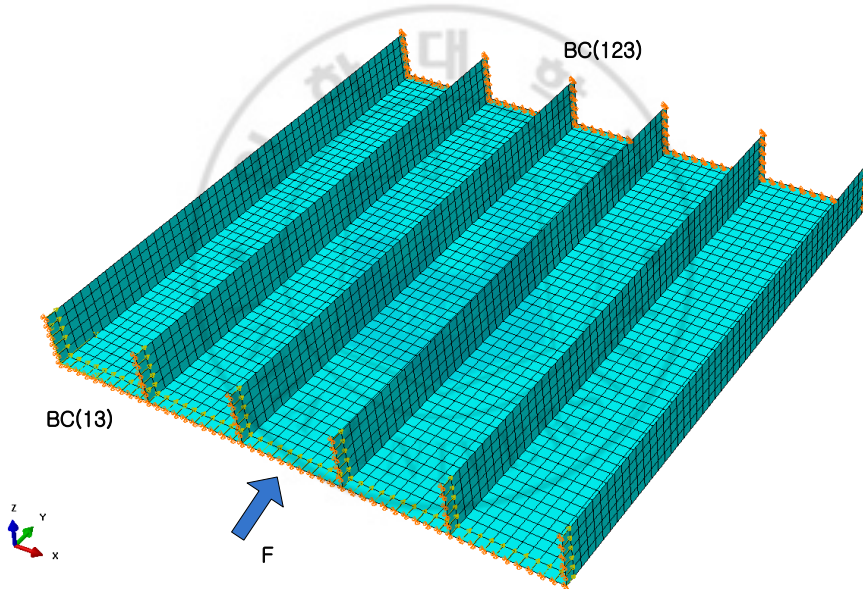


Fig. 23 Stiffened Square Plate Shell Model

해석 결과 고유치는 Table. 11과 같으며, ABAQUS 해석 결과와 유사하게 나옴을 확인할 수 있다. 또한 고유치 벡터(eigenvector)로부터 확인할 수 있는 좌굴 형상 역시 ABAQUS와 유사함을 확인할 수 있다. (Table. 12)

MODE	Present	ABAQUS
1	9640.01	9694.7
2	9908.3	9965.8
3	10106.5	10167.
4	10424	10483.
5	10476	10531.
6	10894.6	10970.
7	11054.2	11118.
8	11250	11307.
9	11357.8	11400.
10	11615.1	11657.

Table. 11 Comparison of Eigenvalue for Stiffened Square Plate Shell with ABAQUS

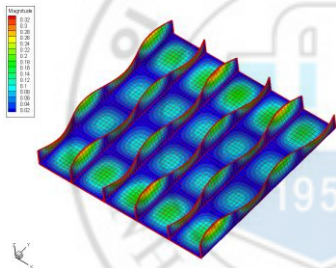
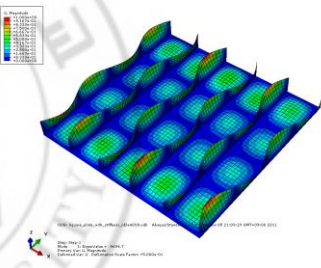
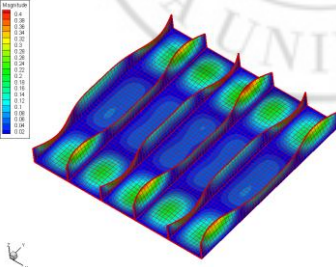
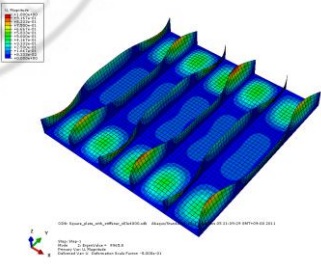
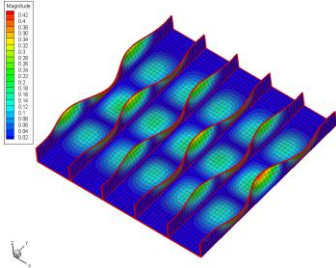
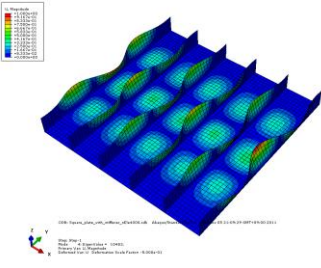
MODE	Present	ABAQUS
1		
2		
4		

Table. 12 Comparison of Mode Shape for Stiffened Square Plate Shell with ABAQUS

3.4 Dynamic Buckling Analysis

3.4.1 Dynamic Buckling Analysis of Beam

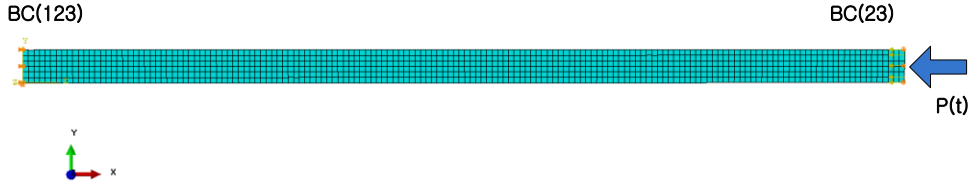


Fig. 24 Dynamic Buckling Analysis Model for Beam

동적 좌굴 해석 프로그램의 검증을 위해 먼저 Fig. 24와 같은 보(beam) 형상에 대한 동적 좌굴 이론값과 유한요소해석 결과를 비교해 보았다. 보의 크기는 먼저 가로 800mm, 세로 30mm, 두께 3mm 이고, 요소는 4노드 쉘 요소 160x6격자를 사용하였다. 탄성계수(Young's modulus)는 68.9GPa이고, 프아송 비(Poisson's ration)는 0.33, 밀도는 2700kg/m³의 물성치를 주었다. 경계조건은 왼쪽 면은 XYZ방향의 변위를 구속하였고, 오른쪽 면은 YZ방향의 변위를 구속하였다. 하중은 식 (3.3)와 같은 시간에 따른 하중을 가하였으며, 이 때 동적 좌굴 해석을 위한 방정식은 식 (3.4)와 같다. 이 때 P_0 는 정적 하중, P_t 는 동적 하중의 크기, θ 는 가진 주파수(excitation frequency), β 는 동적 매개변수(Dynamic parameter), \mathbf{K} 는 강성 행렬(stiffness matrix), $\mathbf{K}_g^{(s)}$ 는 정적 하중에 대한 기하 강성 행렬(geometric stiffness matrix), $\mathbf{K}_g^{(d)}$ 는 동적 하중에 대한 기하 강성 행렬, \mathbf{M} 은 질량 행렬(Mass matrix)을 의미하며, 고유치 해석(eigenvalue analysis)을 통해 가진 주파수를 구할 수 있다.

$$P(t) = P_0 + P_t \beta \cos(\theta t) \quad (3.3)$$

$$\left| \mathbf{K} + \mathbf{K}_g^{(s)} \pm \frac{\beta}{2} \mathbf{K}_g^{(d)} - \frac{\theta^2}{4} \mathbf{M} \right| = 0 \quad (3.4)$$

Fig. 24와 같은 보 모델에 대해 유한요소해석을 이용한 고유치 해석 결과 고유진동수(natural frequency)는 10.7Hz이고, 임계좌굴하중(critical buckling loads) 71.73N으로 계산되었다. 그리고 동적 좌굴 해석을 수행하여 불안정 경계 영역(instability region)을 구하고, 이를 이론값과 비교한 결과 Fig. 25과 같이 나타낼 수 있으며, 유사한 결과가 나옴을 확인할 수 있다. 이 때 $P_0=0$, $\beta=1$ 인 경우 이다. 그리고 Fig. 25에서 하중이 0일 때 구조물이 불안정해지는 가진 주파수는 고유진동수의 두 배임을 확인할 수 있으며, 동적 하중의 크기가 증가할수록 불안정 경계 영역이 넓어짐을 확인할 수 있다.

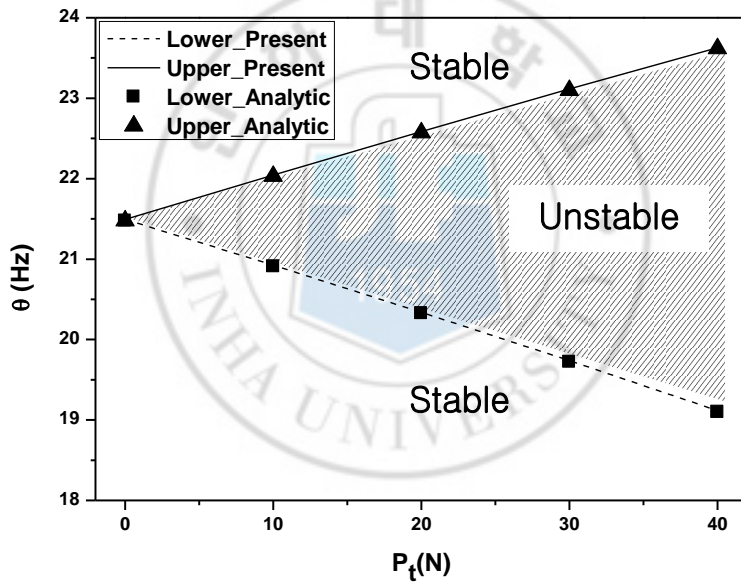


Fig. 25 Dynamic Instability Region of Beam

3.4.2 Dynamic Buckling Analysis of Plate

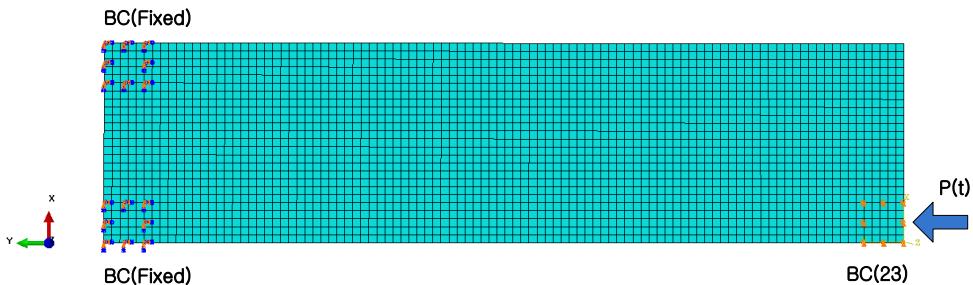


Fig. 26 Dynamic Buckling Model for Plate

동적 좌굴 해석 프로그램의 검증을 위해 Fig. 26과 같은 판(plate) 형상에 대한 동적 좌굴 실험값과 유한요소해석 결과를 비교해 보았다. 판의 크기는 먼저 가로 1000mm, 세로 250mm, 두께 1mm 이고, 요소는 4노드 쉘 요소 100x25격자(mesh)를 사용하였다. 탄성계수(Young's modulus)는 63.3GPa이고, 프아송 비(Poisson's ration)는 0.33, 밀도는 2678.4kg/m³의 물성치를 주었다. 경계조건은 실험 모델을 바탕으로 한쪽 면은 양 끝 단의 50x50mm² 영역을 고정 구속하였고, 반대쪽 면은 한쪽 끝 단의 50x50mm² 영역을 XZ방향의 변위에 대해 구속하였다. 하중은 식 (3.3)와 같은 시간에 따른 하중을 가하였으며, 이 때 동적 좌굴 해석을 위한 방정식은 식 (3.4)와 같다.

Fig. 26과 같은 판(plate) 형상에 대해 유한요소해석을 이용한 고유치 해석 결과 고유진동수(natural frequency)는 5.17Hz이고, 임계 좌굴 하중(critical buckling loads)는 49.6N으로 계산되었다. 그리고 동적 하중에 대한 동적 좌굴 해석을 수행하여 불안정 경계 영역(instability region)을 구한 결과 Fig. 27과 같은 결과를 얻을 수 있으며, 실험값과 유한요소해석 결과가 유사한 경향성을 보이는 것을 확인 할 수 있다. 이 때 실선이 유한요소해석 결과이고 사각형 모양의 점들이 실험결과를 나타낸다.[11]

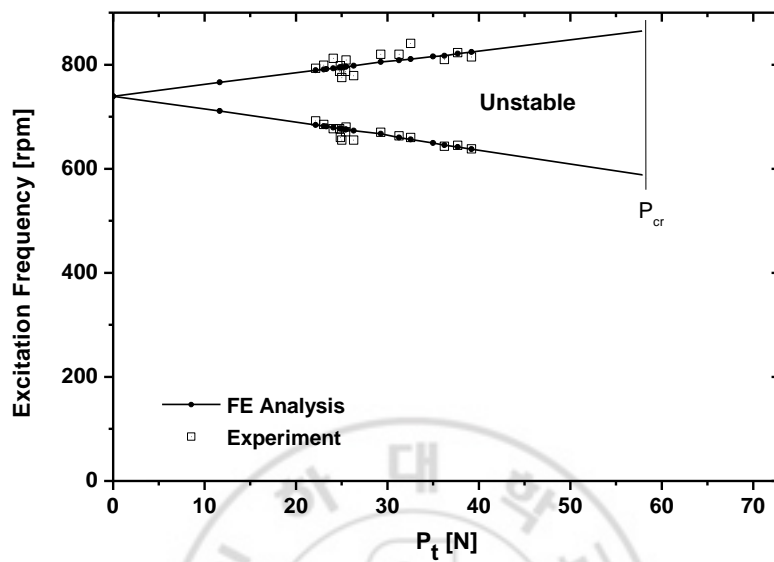


Fig. 27 Dynamic Instability Region of Plate

3.4.3 Dynamic Buckling Analysis of Stiffened Plate

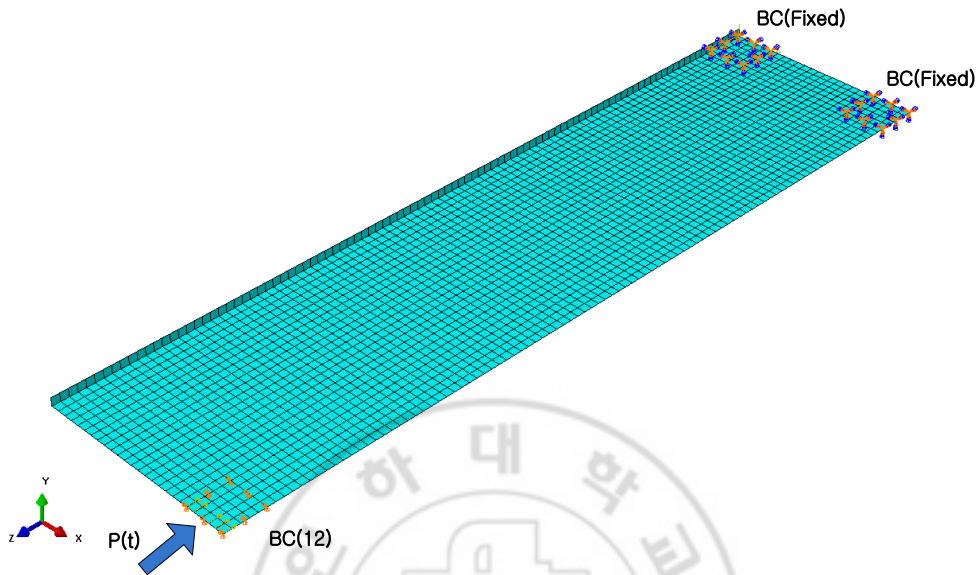


Fig. 28 Dynamic Buckling Analysis Model for Stiffened Plate

동적 좌굴 해석 프로그램의 검증을 위해 Fig. 28과 같은 보강된 판(stiffened plate) 형상에 대한 동적 좌굴 실험값과 유한요소해석 결과를 비교해 보았다. 판의 크기는 먼저 가로 1000mm, 세로 250mm, 두께 1mm 이고, 요소는 4노드 쉘 요소 100x25개를 사용하였다. 보강재는 가로 1000mm, 세로 10mm, 두께 1mm이고, 요소는 4노드 쉘 요소 100x1개를 사용하였다. 탄성계수(Young's modulus)는 62.4GPa이고, 프아송 비(Poisson's ratio)는 0.33, 밀도는 2696.7kg/m^3 의 물성치를 주었다. 경계조건은 실험 모델을 바탕으로 한쪽 면은 양 끝 단의 $50\text{mm} \times 50\text{mm}^2$ 영역을 고정 구속하였고, 반대쪽 면은 한쪽 끝 단의 $50\text{mm} \times 50\text{mm}^2$ 영역을 XY방향의 변위에 대해 구속하였다. 하중은 식 (3.3)와 같은 시간에 따른 하중을 가하였으며, 이 때 동적 좌굴 해석을 위한 방정식은 식 (3.4)와 같다.

동적 하중에 대한 동적 좌굴 해석을 수행하여 불안정 경계 영역(instability region)을 구한 결과 실험값과 유한요소해석 결과가 평판에 비해 다소 차이가 남을 볼 수 있다.(Fig. 29) 그 이유는 유한요소해석의 경우 모델이 “균질하다(homogeneous)”는 가정하에 해석이 이루어지지만

실제 구조물의 경우 다양한 결함(imperfection)이 존재하므로 이러한 차이가 발생할 수 있다. 특히 보강된 판의 경우 일반 평판에 비해 보강재를 만드는 과정에서 구조물에 결함(imperfection)이 발생할 가능성이 높기 때문에 이러한 결과가 나타날 수 있다. 하지만 두 결과값에 대한 전체적인 경향성은 유사함을 알 수 있다. 또한 앞서 해석한 평판과 보강된 평판을 비교해 보면 보강된 평판의 임계 좌굴 하중이 증가하고, 불안정 경계 영역이 전체적으로 상승함을 알 수 있다.[11]

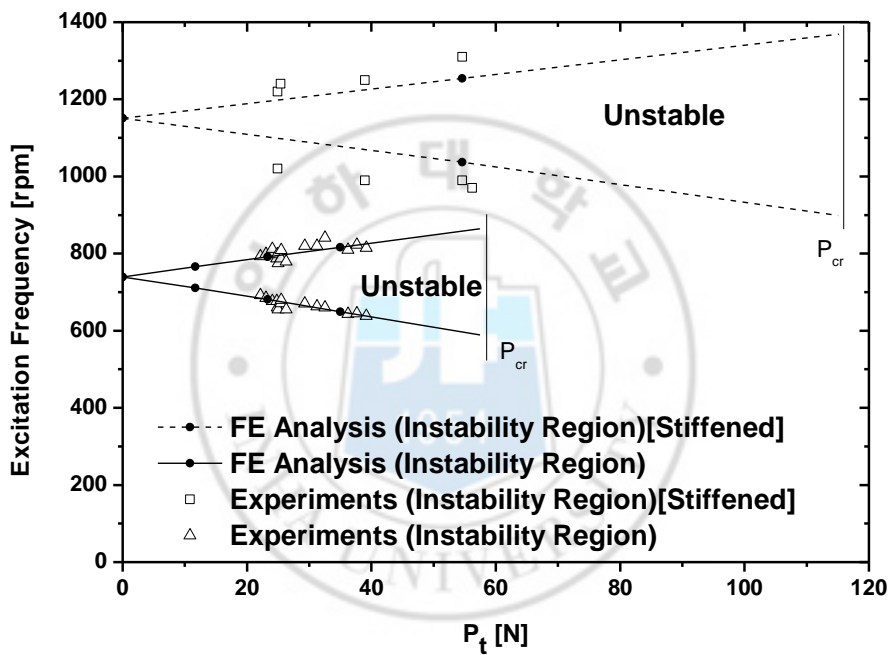


Fig. 29 Comparison of Dynamic Instability Region for Stiffened Plate with Plate

4. 결 론

동적 좌굴 현상은 구조물이 동적 압축 하중을 받을 때 발생하는 동적 불안정 현상으로서, 특히 큰 동적 압축 하중 환경하에 노출되어 있는 초음속 항공기나 탄도 미사일, 발사용 로켓과 지구 대기권 재돌입체 그리고 고속의 수중운동체 등을 설계할 때 반드시 고려되어야 하는 현상이다. 이에 본 연구에서는 동적 압축 하중을 받는 구조물의 동적 좌굴 해석을 위한 프로그램을 개발하였다.

본 연구를 위해 MITC4 쉘 요소를 사용하여 3차원 쉘 구조물을 모델링 하였으며, 고유치 해석 시 필요한 기하 강성 행렬(Geometric stiffness matrix)을 구하기 위해 Total Lagrangian 방법을 사용하여 기하 비선형 해석을 구현하였다. 그리고 질량 행렬은 구조물을 유연하게 하기 위해서 집중 질량 행렬(Lumped mass matrix)을 사용하였다. 또한 진동 및 정적/동적 좌굴 해석 시 필요한 고유치 해석 솔버(Eigenvalue analysis solver)는 Block Lanczos 방법을 사용한 “BLZPACK”이라는 오픈 소스(Open source)를 사용하여 해석 프로그램을 구현하였다.

본 연구에서 개발한 해석 프로그램을 사용하여 선형/비선형 정적 해석과 진동 해석 그리고 정적 좌굴 해석을 수행하였고, 이를 이론값 및 상용유한요소해석 프로그램 해석 결과와 비교하여 프로그램의 타당성과 정확성을 검증하였다. 또한 보의 동적 좌굴 이론으로부터 구한 이론값과 평판 그리고 보강된 평판의 동적 좌굴 실험을 통해 구한 실험값을 유한요소해석 프로그램 결과와 비교하여 본 연구에서 개발한 동적 좌굴 해석 프로그램의 타당성을 검증하였다.

본 연구에서 개발한 동적 좌굴 해석을 위한 유한요소해석 프로그램을 사용하여 구조물 설계 시 동적 좌굴 해석이 필요한 구조물에 대해 해석을 수행 할 수 있으며, 이를 통해 불안정 경계 영역을 예측하고 구조물의 안정화 방안을 모색할 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

- [1] Eduardo N. Dvorkin and Klaus-Jurgen Bathe, “A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis”, *Eng. Comput.*, Vol. 1, No. 1, pp.77-88, 1984.
- [2] Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, Robert J. Witt, *Concepts and application of finite element analysis.*, John Wiley & Sons, 2001.
- [3] Thomas J.R. Hughes, *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.*, Prentice-Hall, 1987.
- [4] O.C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method : Basic Formulation and Linear Problems.*, McGraw-Hill, 1989.
- [5] O.C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method : Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity.*, McGraw-Hill, 1991.
- [6] M. Ruzzene, “Dynamic buckling of periodically stiffened shells : application to supercavitating vehicles”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No.3-4, pp.1039-1059, 2004.
- [7] V. V. Bolotin, *The Dynamic Stability of Elastic System.*, Holden-Day, 1964.
- [8] Leonard Meirovitch, *Method of Analytical Dynamics.*, McGraw-Hill, 1985.
- [9] Eduardo N. Dvorkin, “Nonlinear Analysis of Shells Using the MITC Formulation”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 2, No. 2, pp.1-50, 1995.
- [10] J. Argyris, “An excursion into large rotations”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 32, No. 1-3, pp.85-155, 1982.
- [11] Minho Chung, Hee Jun Lee, Woo-Bin Lim, Jin Yeon Cho, Wanil Byun, Seung Jo Kim and Sung-Han Park, “Experimental study on dynamic buckling phenomena for supercavitating underwater vehicle”, *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, submitted.

부 록

1. Strain/Stress Vector

$$\text{Strain } \{\mathbf{E}\} = \begin{Bmatrix} E_{\xi\xi} \\ E_{\eta\eta} \\ E_{\varsigma\varsigma} \\ 2E_{\eta\varsigma} \\ 2E_{\xi\varsigma} \\ 2E_{\xi\eta} \end{Bmatrix}, \quad \text{Stress } \{\mathbf{S}\} = \begin{Bmatrix} S_{\xi\xi} \\ S_{\eta\eta} \\ S_{\varsigma\varsigma} \\ 2S_{\eta\varsigma} \\ 2S_{\xi\varsigma} \\ 2S_{\xi\eta} \end{Bmatrix}$$

2. Shape Function

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned}$$

3. Jacobian Matrix

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} X_{,\xi} & Y_{,\xi} & Z_{,\xi} \\ X_{,\eta} & Y_{,\eta} & Z_{,\eta} \\ X_{,\varsigma} & Y_{,\varsigma} & Z_{,\varsigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X}{\partial \varsigma} & \frac{\partial Y}{\partial \varsigma} & \frac{\partial Z}{\partial \varsigma} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varsigma \frac{\partial N_1}{\partial \xi} t_1 & \varsigma \frac{\partial N_2}{\partial \xi} t_2 & \varsigma \frac{\partial N_3}{\partial \xi} t_3 & \varsigma \frac{\partial N_4}{\partial \xi} t_4 \\ \varsigma \frac{\partial N_1}{\partial \eta} t_1 & \varsigma \frac{\partial N_2}{\partial \eta} t_2 & \varsigma \frac{\partial N_3}{\partial \eta} t_3 & \varsigma \frac{\partial N_4}{\partial \eta} t_4 \\ N_1 t_1 & N_2 t_2 & N_3 t_3 & N_4 t_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^n \\ \mathbf{V}_2^n \\ \mathbf{V}_3^n \\ \mathbf{V}_4^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

감사의 글

이렇게 밤늦게 실험실에서 책상 앞에 앉아 있는 날도 얼마 남지 않았습니다. 이제는 졸업을 앞두고 논문의 마지막 장을 써 내려간다는 것이 실감나지 않고 아쉬운 마음이 크지만 다사다난했던 지난 2년의 시간들은 아마도 제 인생 중에 큰 전환점이었으며 귀중한 발판으로 삼으려 합니다.

아직은 부족하지만 제가 이렇게 많은 발전과 함께 자그마한 결실을 맺고 졸업을 앞두게 되어 이 자리까지 도움을 주신 고마운 분들에게 감사의 글로써 졸업논문을 맺으려 합니다.

먼저, 너무도 부족했던 저를 대학원 짧은 기간 동안에 이렇게 발전하도록 일일이 깨우쳐주시고 함께 고민해 주시며 아낌없이 지도해주신 조진연 교수님께 심심한 감사를 드립니다. 그리고 학부시절 공학도의 길을 제시해주시고 저에게 큰 힘이 되어주신 김기욱 교수님, 항상 항공과의 발전을 위해 헌신적으로 학생들을 지도해 주시는 김범수 교수님, 최동환 교수님, 최기영 교수님, 노태성 교수님, 이승수 교수님, 유창경 교수님께 감사와 존경을 전합니다.

실험실에서 동고동락했던 민환이형, 민호, 순신이, 연철이, 재연이, 이제 대학원 생활을 시작하게 될 소영이, 우빈이 모두에게 고마운 마음을 전하며 모두들에게 앞으로도 좋은 일이 가득하길 바랍니다. 그리고 대학원에 입학하여 도움을 주신 장훈이형, 형수형, 영민이형, 규원이형에게도 감사의 뜻을 전합니다.

초등학교 때부터 지금까지도 변치 않는 우정을 나누고 있는 동현이, 용덕이, 항상 자기자리에서 최선을 다하는 대학 친구들 상형이형, 재필이, 광규, 영민이에게도 감사의 뜻을 전합니다.

그리고 저의 소중한 가족들에게 감사합니다. 어려운 여건에서도 항상 큰아들을 믿어주시고 노심초사 걱정해 주시며 뒷바라지 해주신 부모님의 은혜에 깊은 감사를 드립니다. 또한 멀리 있고 잘해주지도 못하는 오빠를 믿고 따라주는 동생 진아, 민희에게도 고마움을 전하며 항상 사랑으로 지켜봐 주고 힘이 되어준 저의 가장 소중한 친구이자 연인인 미연이에게 고마움을 전합니다.

마지막으로 저를 믿어주시고 사랑해주신 많은 분들의 기대에 보답하도록 사회에 꼭 필요한 일꾼이 되며 항상 최선을 다하는 모습을 보여드릴 것입니다.

2011년 12월

이 희 준