Solid Element

1. 등매개 선형 솔리드 요소

- 3차원 부피가 있는 구조물의 모델링에 주로 사용
- 절점당 3개의 이동 변위 자유도를 가짐
- 회전 변위가 없기 때문에 보 요소나 판요소와 같이 사용시 Singular 오류 주의
- 요소 aspect ratio가 1에 가까울수록 결과가 정확

2. 정식화

1) 요소 위치와 변위

3차원 솔리드 요소의 위치 $\mathbf{x}$는 아래와 같이 형상 함수를 이용해 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x} = \{x, y, z\}$$

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum N_i(\xi)\mathbf{x}_i$$

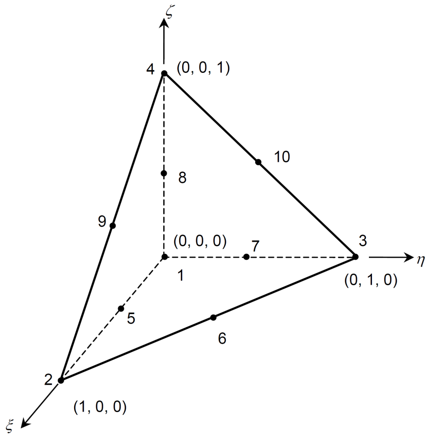
또한 Isoparametric 요소의 변위도 아래와 같이 형상 함수를 이용해 표현 할 수 있다. 솔리드 요소는 회전 변위 없이 이동 변위만 가진다.

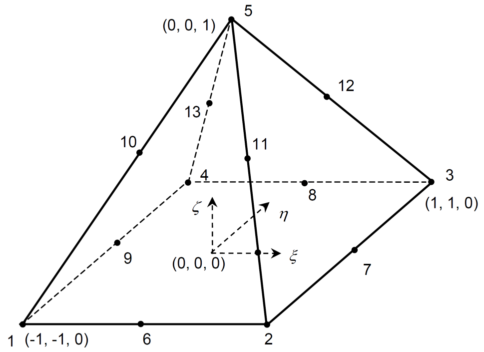
$$\mathbf{u} = \{u, v, w\}$$

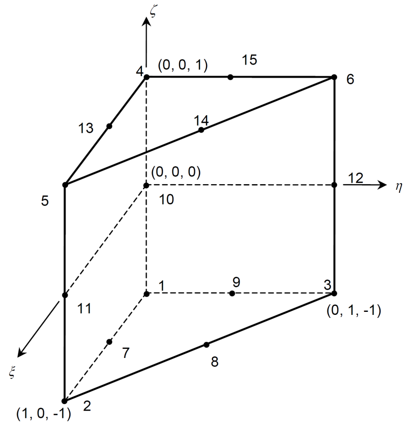
$$\mathbf{u}(\xi) = \sum N_i(\xi)\mathbf{u}_i$$

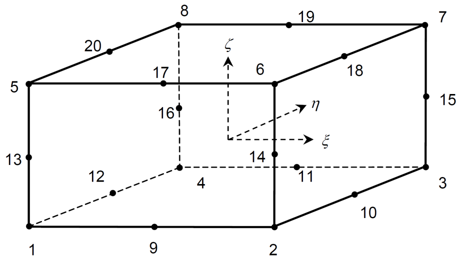
여기서 N_i은 솔리드 요소 절점에서의 형상 함수이고 $\mathbf{x}_i$는 절점의 위치, $\mathbf{u}_i$는 절점의 변위 벡터이다.

솔리드 요소는 4절점 사면체, 5절점 피라미드, 6절점 삼각기둥, 8절점 육면체만 설명하며 요소 Natural 좌표계와 형상 함수는 아래와 같다.









- 4절점 사면체

$$N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta \qquad N_2 = \xi \qquad N_3 = \eta \qquad N_4 = \zeta$$

- 5절점 피라미드

$$N_1 = \frac{1}{4}\{(1-\xi)(1-\eta) - \zeta + \frac{\xi\eta\zeta}{1-\zeta}\} \qquad N_2 = \frac{1}{4}\{(1+\xi)(1-\eta) - \zeta - \frac{\xi\eta\zeta}{1-\zeta}\}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}\{(1+\xi)(1+\eta) - \zeta + \frac{\xi\eta\zeta}{1-\zeta}\} \qquad N_4 = \frac{1}{4}\{(1-\xi)(1+\eta) - \zeta - \frac{\xi\eta\zeta}{1-\zeta}\}$$

$$N_5 = \zeta$$

- 6절점 삼각기둥

$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$

$$N_1 = \frac{\lambda}{2}(1-\zeta) \qquad N_2 = \frac{\xi}{2}(1-\zeta) \qquad N_3 = \frac{\eta}{2}(1-\zeta)$$

$$N_4 = \frac{\lambda}{2}(1+\zeta) \qquad N_5 = \frac{\xi}{2}(1+\zeta) \qquad N_6 = \frac{\eta}{2}(1+\zeta)$$

- 8절점 육면체

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \qquad N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \qquad N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \qquad N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \qquad N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

2) 변형률-변위 관계

솔리드 요소의 변형률-변위의 관계는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

위 식들을 정리해 행렬 형태로 나타내면 아래와 같다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bu}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \cdots \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

위의 형상 함수들은 모두 Natural Coordinates에 대해 정의되었기 때문에 아래와 같은 관계를 이용해 형상 함수들의 미분을 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

3) 응력-변형률 관계

응력과 변형률의 관계는 Hooke's 법칙에 의해 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

4) 강성 행렬

솔리드 요소의 강성 행렬은 아래 식을 통해 계산 할 수 있다.

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

$$= \iiint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \left| \mathbf{J} \right| d\xi d\eta d\zeta$$

위 식은 가우스 적분을 통해 계산하며 각 요소별 가우스 적분점은 아래와 같다.

- 4절점 사면체 1차 형상함수 적분점 (1점 적분)

$$g_1 = \{0.25, 0.25, 0.25\} \qquad w_1 = \frac{1}{6}$$

- 5절점 피라미드 1차 형상함수 적분점 (8점 적분)

$$a = \{0.877485177344559, 0.45584815598877\}$$

$$b = \{0.232547451253508, 0.100785882079825\}$$

$$g_1 = \left\{-\frac{a_1}{\sqrt{3}}, -\frac{a_1}{\sqrt{3}}, 1-a_1\right\} \qquad w_1 = b_1$$

$$g_2 = \left\{\frac{a_1}{\sqrt{3}}, -\frac{a_1}{\sqrt{3}}, 1-a_1\right\} \qquad w_2 = b_1$$

$$g_3 = \left\{\frac{a_1}{\sqrt{3}}, \frac{a_1}{\sqrt{3}}, 1-a_1\right\} \qquad w_3 = b_1$$

$$g_4 = \left\{-\frac{a_1}{\sqrt{3}}, \frac{a_1}{\sqrt{3}}, 1-a_1\right\} \qquad w_4 = b_1$$

$$g_5 = \left\{-\frac{a_2}{\sqrt{3}}, -\frac{a_2}{\sqrt{3}}, 1-a_2\right\} \qquad w_5 = b_2$$

$$g_6 = \left\{\frac{a_2}{\sqrt{3}}, -\frac{a_2}{\sqrt{3}}, 1-a_2\right\} \qquad w_6 = b_2$$

$$g_7 = \left\{\frac{a_2}{\sqrt{3}}, \frac{a_2}{\sqrt{3}}, 1-a_2\right\} \qquad w_7 = b_2$$

$$g_8 = \left\{-\frac{a_2}{\sqrt{3}}, \frac{a_2}{\sqrt{3}}, 1-a_2\right\} \qquad w_8 = b_2$$

- 6절점 삼각기둥 1차 형상함수 적분점 (6점 적분)

$$g_1 = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_1 = \frac{1}{6}$$

$$g_2 = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_2 = \frac{1}{6}$$

$$g_3 = \left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_3 = \frac{1}{6}$$

$$g_4 = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_4 = \frac{1}{6}$$

$$g_5 = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_5 = \frac{1}{6}$$

$$g_6 = \left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_6 = \frac{1}{6}$$

- 8절점 육면체 1차 형상함수 적분점 (8점 적분)

$$g_1 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_1 = 1.0$$

$$g_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_2 = 1.0$$

$$g_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_3 = 1.0$$

$$g_4 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_4 = 1.0$$

$$g_5 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_5 = 1.0$$

$$g_6 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_6 = 1.0$$

$$g_7 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_7 = 1.0$$

$$g_8 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \qquad w_8 = 1.0$$

따라서 강성행렬은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathbf{K} = \sum w \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{J}$$

5) 비적합 모드

비적합 모드는 솔리드 요소의 잠김 현상을 보완하기 위해 사용하며 요소 내에 추가 자유도를 도입하여 계산할 수 있다. 6절점 삼각기둥과 8점점 육면체 요소에서 사용되며 비적합 모드에 대한 변위와 보간 함수는 아래와 같다.

- 6절점 삼각기둥

$$\mathbf{u}_{inc} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$$

$$u = \sum N_i u_i + P_1 \alpha_1 \qquad v = \sum N_i v_i + P_1 \beta_1 \qquad w = \sum N_i w_i + P_1 \gamma_1$$

$$P_1 = 1 - \zeta^2$$

- 8절점 육면체

$$\mathbf{u}_{inc} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$$

$$u = \sum N_i u_i + \sum P_i \alpha_i \qquad v = \sum N_i v_i + \sum P_i \beta_i \qquad w = \sum N_i w_i + \sum P_i \gamma_i$$

$$P_1 = 1 - \xi^2 \qquad P_2 = 1 - \eta^2 \qquad P_3 = 1 - \zeta^2$$

$$\mathbf{B}_{inc} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial P_i}{\partial z} \\ \frac{\partial P_i}{\partial y} & \frac{\partial P_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_i}{\partial z} & \frac{\partial P_i}{\partial y} \\ \frac{\partial P_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial P_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

따라서 비적합 모드가 포함된 변형률-변위 행렬은 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$\mathbf{B}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B}_{inc} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \sum w \mathbf{B}_{tot}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{tot} \mathbf{J}$$

비적합 모드에 대한 자유도는 전체 행렬 분해시 계산량을 줄이기 위해 정적 응축을 통해 제거하여 계산하게 된다.